Angles inscrits dans une sphère
Fiche élève

Problème

Dans le plan, deux angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ inscrits sur le même arc de cercle sont toujours égaux. C'est le théorème des angles inscrits.

L'objectif de cette étude est d'examiner s'il en est de même dans l'espace pour deux angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ inscrits sur la même calotte sphérique ? Si oui, le prouver, sinon, dire dans quels cas $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$?

Dans la suite, $\mathscr{S}$ désigne une sphère de centre O. $\mathscr{C}$ est un cercle inclus dans $\mathscr{S}$ et A et B sont deux points donnés de $\mathscr{C}$. M et N sont deux points variables sur une des calottes sphériques définies par $\mathscr{C}$.

Partie A. Examen de la situation

1. Ouvrir le fichier **figure.g3w**
2. Créer un point libre N sur la sphère $\mathscr{S}$, visualiser l'angle $\widehat{ANB}$ et afficher sa mesure. On fera en sorte que les points M et N appartiennent à la même calotte sphérique déterminée par le cercle $\mathscr{C}$.
3. Au vu des résultats précédents, a-t-on $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$: toujours, jamais ou parfois ?
4. Le théorème des angles inscrits est-il valable dans l'espace ?

Partie B. Cas particulier où les points M et N sont situés dans un même plan passant par A et B

1. Ouvrir le fichier **figure.g3w** et créer un point N situé à la fois sur la sphère $\mathscr{S}$ et sur le plan $\mathscr{P}_1$ passant par les points A, B et M.
2. Au vu des résultats précédents, quand les points M et N sont situés dans un même plan passant par A et B, a-t-on $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$: **toujours, jamais parfois ?**
3. Le théorème des angles inscrits est-il valable dans cette configuration ?
4. Justifier votre réponse (*on pourra s'aider en utilisant une vue d'un plan isolé de face*).

Partie C. Cas particulier où les points M et N sont situés dans deux plans différents, passant par A et B et symétriques par rapport au plan (AOB)

1. Ouvrir le fichier **figure.g3w** et créer un point N situé à la fois sur la sphère $\mathscr{S}$ et sur le plan $\mathscr{P}_2$ symétrique du plan (ABM) par rapport au plan (AOB).
2. Au vu des résultats précédents, dans cette situation, a-t-on $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$: **toujours, jamais ou parfois** ?
3. Le théorème des angles inscrits est-il valable dans cette configuration ?

   Justifier la réponse donnée (*on pourra s'aider en utilisant un point auxiliaire du plan* $\mathscr{P}_2$).

Partie D : M et N étant a priori n'importe où sur la sphère, le but de cette question est de déterminer les positions relatives de M et N telles que . $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

1. a. Ouvrir le fichier figure.g3w et créer un point libre N sur la sphère s, visualiser l'angle $\widehat{ANB}$ et afficher sa mesure. *On fera en sorte que les points M et N appartiennent à la même calotte sphérique déterminée par le cercle* $\mathscr{C}$.

b. Créer les points intersections du plan médiateur de [AB], du plan (AMB) et de la sphère $\mathcal{S}$. Expliquer pourquoi l'un des deux, que l'on notera M', vérifie l'égalité $\widehat{AM'B} = \widehat{AMB}$.

c. Créer de même le point N' situé sur le plan médiateur de [AB], sur le plan (ANB) et sur la sphère $\mathcal{S}$ tel que $\widehat{AN'B} = \widehat{ANB}$.

2. Soit I le milieu du segment [AB].

   a. S'aider de la vue dans un plan isolé bien choisi pour démontrer l'égalité $\tan\left(\frac{\widehat{AM'B}}{2}\right) = \frac{AB}{2IM'}$.

   b. Démontrer de même l'égalité $\tan\left(\frac{\widehat{AN'B}}{2}\right) = \frac{AB}{2IN'}$.

   c. En déduire que, si les angles $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{AN'B}$ sont égaux, alors IM' = IN'.

3. Déduire des questions précédentes que, si les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont égaux, alors les points M' et N' sont soit confondus soit symétriques par rapport à la droite (IO) dans le plan médiateur de [AB]. Quelles sont alors les positions relatives des points M et N ?

Partie E. Conclusion.

A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les points M et N deux angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ inscrits dans une même calotte sphérique de centre O sont-ils égaux ?