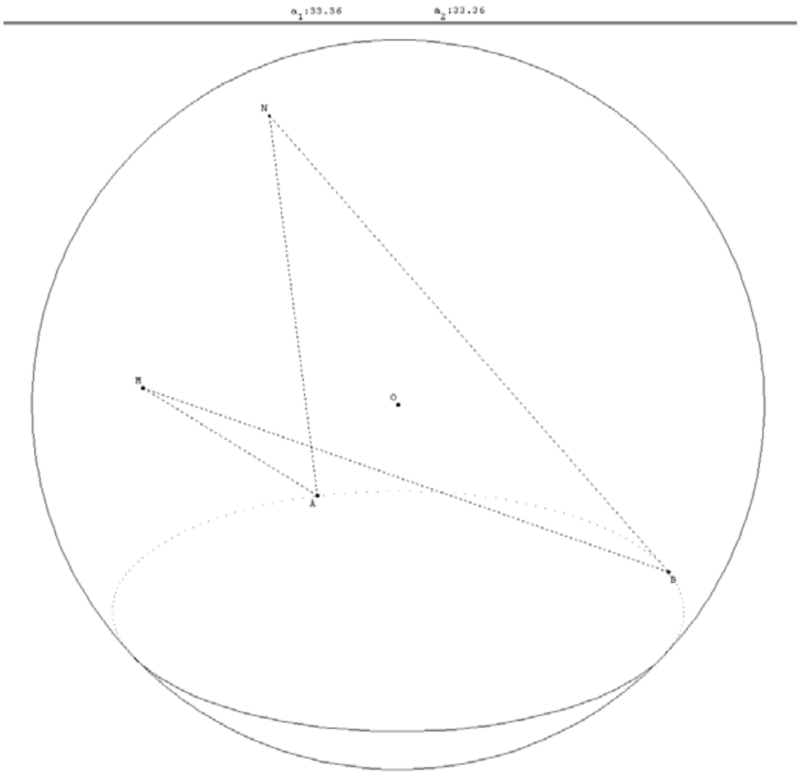
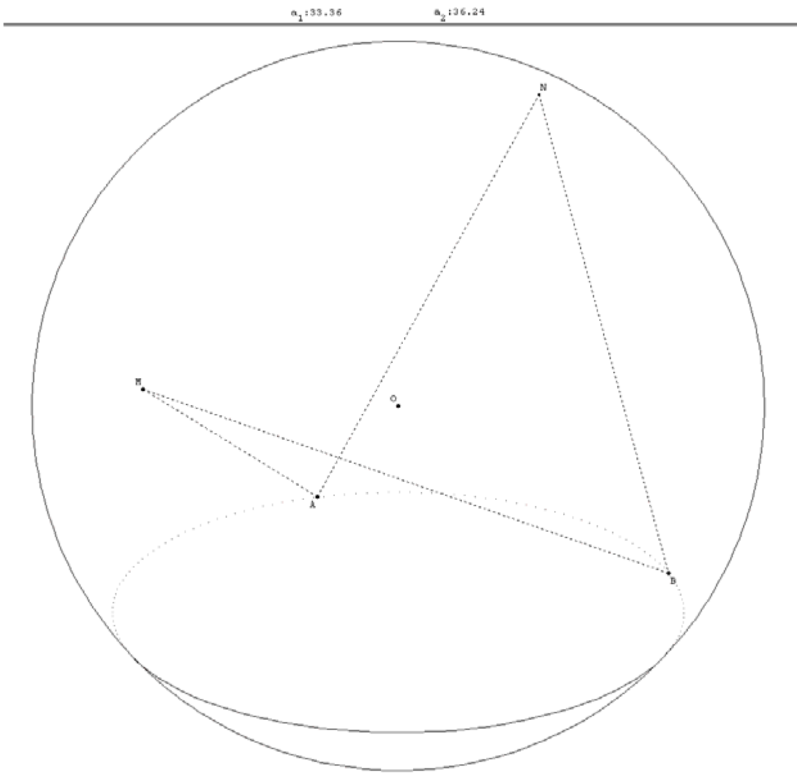
Angles inscrits dans une sphère

Fiche professeur

Partie A. Examen de la situation

En déplaçant le point N sur la calotte sphérique, les élèves constateront aisément que l'égalité peut être vraie mais pas toujours. Le théorème de l'angle inscrit n'est donc pas valable dans l'espace.





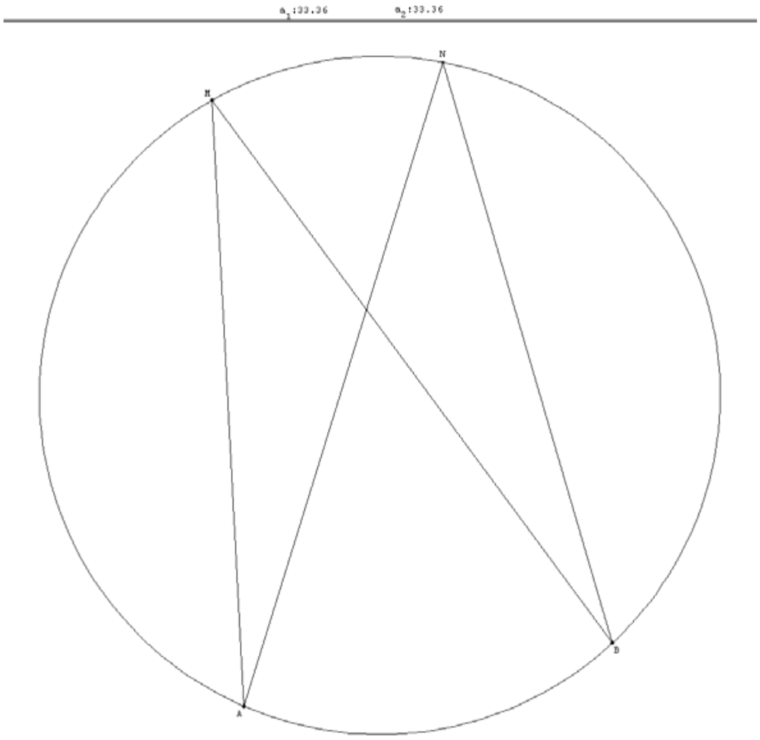
Partie B. Cas particulier où les points M et N sont situés dans un même plan passant par A et B

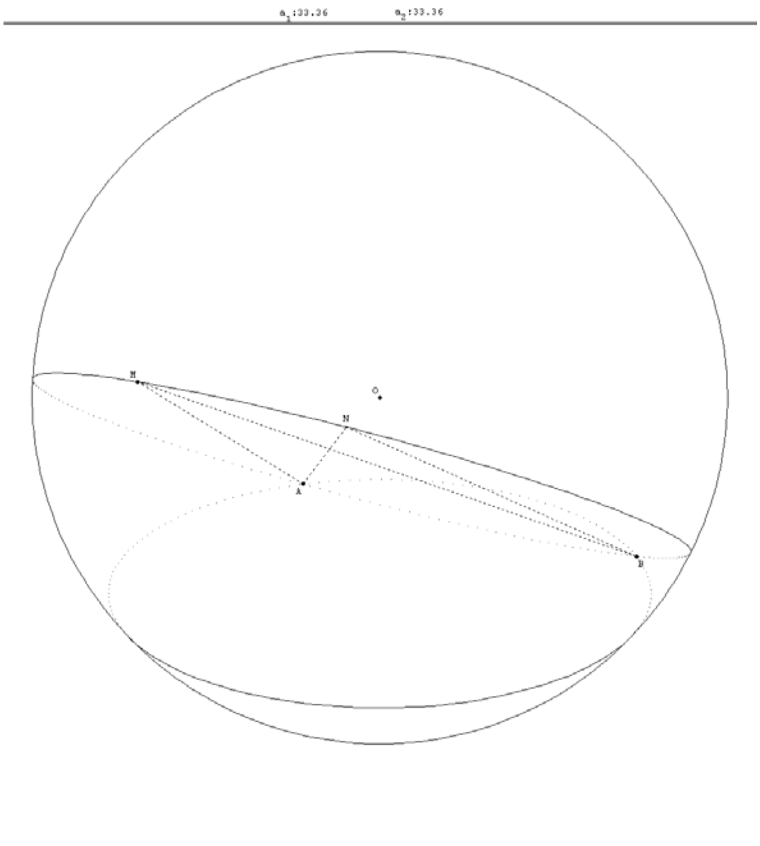
Pour la figure, on crée d'abord le cercle intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan (ABM).

Il ne reste plus qu'à créer le point libre N sur ce cercle.

Le déplacement de N sur l'arc de cercle d'extrémités A et B contenant M ne change pas la mesure de l'angle $\widehat{ANB}$ si bien que le théorème de l'angle inscrit semble valable dans cette configuration.

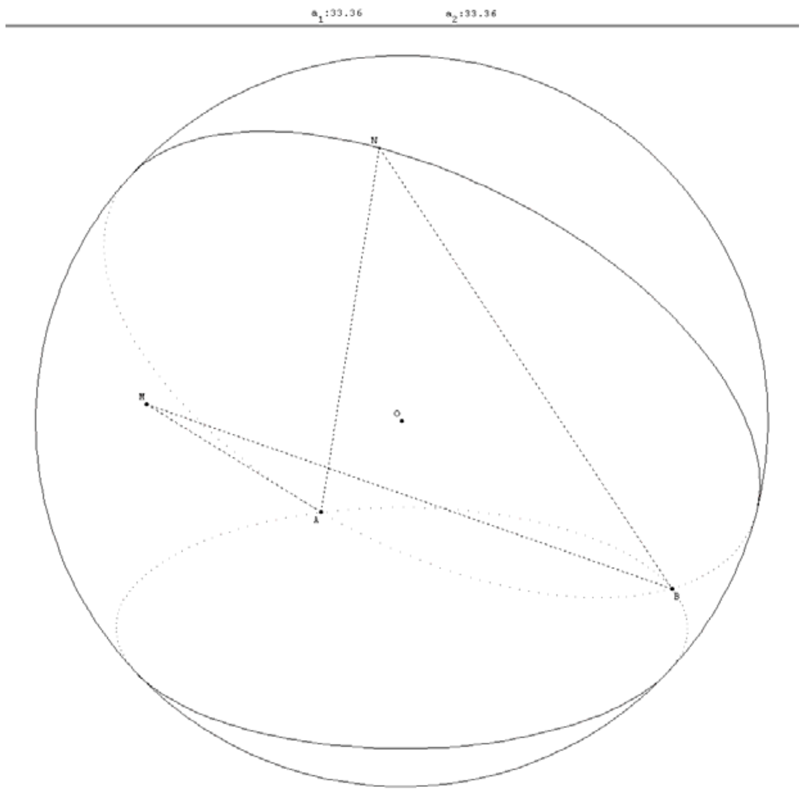
En fait, il l'est vraiment d'après le théorème des angles inscrits appliqué dans le plan (AMB).





Partie C. Cas particulier où les points M et N sont situés dans deux plans différents, passant par A et B et symétriques par rapport au plan (AOB)

Pour la figure, on peut commencer par créer le point M_2 image de M par la symétrie par rapport au plan (AOB). On crée ensuite successivement le plan (ABM_2), le cercle intersection de la sphère et du plan (AM_2B). Il reste alors à créer le point libre N sur ce cercle.



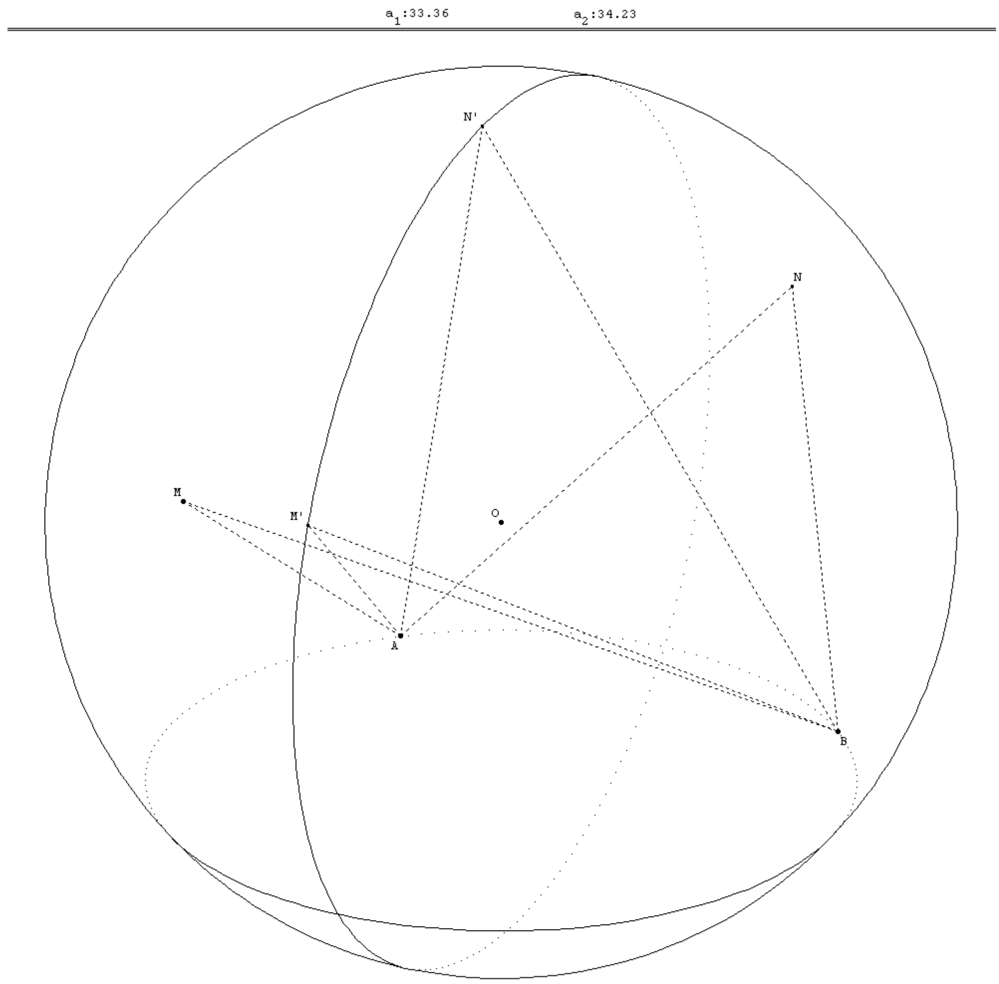
Le déplacement de N sur l'arc de cercle d'extrémités A et B contenant M ne change pas la mesure de l'angle $\widehat{ANB}$ si bien que le théorème de l'angle inscrit semble valable dans cette configuration.

En fait, il l'est puisque une symétrie par rapport à un plan conserve les angles géométriques, d'où l'égalité $\widehat{AMB} = \widehat{AM_2B}$. Ensuite, les angles $\widehat{AM_2B}$ et $\widehat{ANB}$ sont égaux d'après le théorème des angles inscrits appliqué dans le plan (AM_2B).

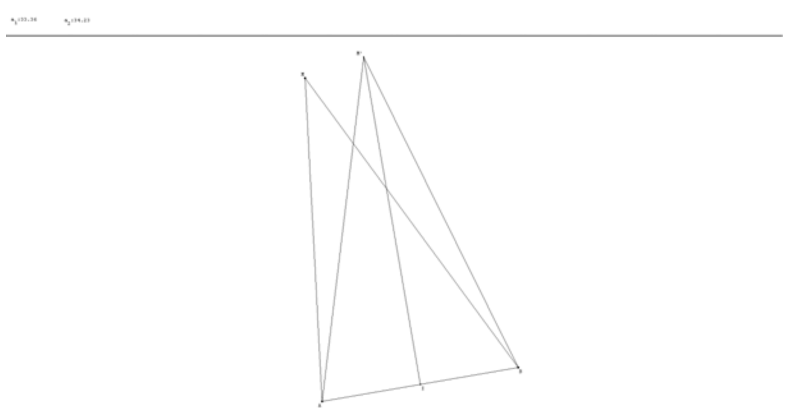
En conclusion, les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont bien égaux.

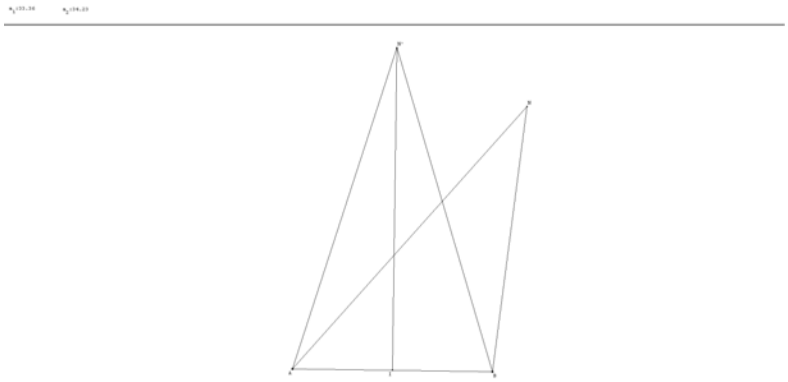
Partie D. M et N étant a priori n'importe où sur la sphère, le but de cette question est de déterminer les positions relatives de M et N telles que $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

1. Pour la création du point M', on peut commencer par créer la droite intersection du plan médiateur de [AB] et du plan (AMB) puis les deux points d'intersection de cette droite et de la sphère. Il ne reste plus qu'à cacher le deuxième point puis la droite.



2.Les égalités ne sont rien d'autre que les formules liant dans un triangle rectangle la tangente d'un angle, ses côtés opposé et adjacent.





L'égalité des angles $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{AN'B}$ entraîne l'égalité des tangentes de leurs moitiés et donc l'égalité IM' = IN'.

3. Si les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont égaux alors $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{AN'B}$ aussi, d'où l'égalité IM' = IN'.

On distingue alors deux cas selon que M' et N' sont confondus ou distincts.

1er cas : M'=N'

Les points M et N sont dans le même plan passant par A et B.

2e cas : M'≠N'

Les points M' et N'étant sur la sphère, on a OM' = ON' outre IM' = IN'.

Donc, la droite (IO) est la médiatrice de [M'N'] dans le plan médiateur de [AB] ; donc les points M' et N' sont bien symétriques par rapport à la droite (IO) dans ce plan.

Les plans (AM'B) et (AN'B) sont alors symétriques par rapport au plan (AOB).

Or, ces plans contiennent respectivement M et N.

Donc les points M et N sont situés dans des plans symétriques par rapport au plan (AOB).

Partie E. Conclusion.

La condition nécessaire (d'après la partie D) et suffisante (d'après les parties B et C) pour que deux angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ inscrits dans une même calotte sphérique de centre O soient égaux est que les points M et N soient situés dans un même plan passant par A et B ou bien soient situés dans deux plans passant par A et B, symétriques par rapport au plan (AOB).