Grand angle :proposition de solutions

1[ère] solution : Géométrie et trigonométrie dans l'espace

- $(BD)\perp(AC)$ et $(DH)\perp(AC)$: (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDH) donc (AC) est orthogonale au plan (BDH).

Or I, centre du carré $ABCD$, est le milieu de $[BD]$ et de $[AC]$.

Donc I appartient au plan (BDH) et à la droite (AC).

Par conséquent le plan (BDH) est le plan médiateur du segment $[AC]$.

Comme M est un point de la diagonale $[BH]$, M appartient au plan (BDH) et M est équidistant des points A et C. **Donc le triangle AMC est isocèle en M**

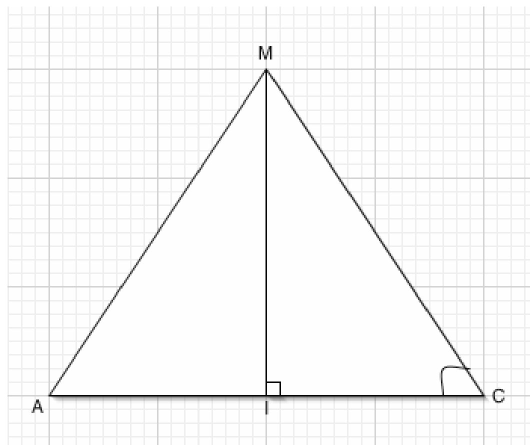
- Par conséquent $\widehat{MCA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\widehat{AMC}}{2}$

$\widehat{AMC}$ est maximum si et seulement si $\widehat{MCA}$ est minimum.

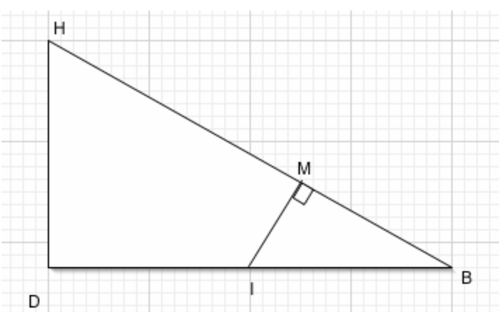
Or $\widehat{MCA}\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\widehat{MCA}$ est minimum si et seulement si $\tan\widehat{MCA}$ est minimum car la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Or, dans le triangle IMC rectangle en I, $\tan\widehat{MCA}=\frac{IM}{IC}$.

Comme $IC=\frac{1}{2}AC$, IC est une longueur constante



$\tan\widehat{MCA}$ est minimum si et seulement si IM est minimale.



IM est minimale $\Leftrightarrow$ M est le projeté orthogonal de I sur $[BH]$

- **Calcul de** $\widehat{AMC}$

BDH et BIM sont deux triangles semblables car ils ont deux angles égaux

Donc leurs côtés sont proportionnels et on obtient : $\frac{BI}{BH}=\frac{IM}{DH}$

Or $[BD]$ est la diagonale d'un carré de côté a donc $BD=a\sqrt{2}$ et $BI=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Comme $DH = a$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BDH on a : $BH = a\sqrt{3}$

Donc $IM = \dfrac{BI \times DH}{BH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \times a}{a\sqrt{3}} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ et $\tan \widehat{MCA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}}{a\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Par conséquent $\widehat{MCA} = \dfrac{\pi}{6} = 30°$ et $\widehat{AMC} = \pi - 2 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3} = 120°$.

2ème solution : Géométrie analytique et produit scalaire dans l'espace

Dans le repère $\left(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$

$A(1;0;0)$; $B(0;0;0)$; $C(0;1;0)$; $D(1;1;0)$; $E(1;0;1)$; $F(0;0;1)$ et $H(1;1;1)$

Or M appartient au segment [BH]. Il existe donc un réel $k \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BH}$.

D'où les coordonnées de M : $M(k;k;k)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MA \times MC \times \cos \widehat{AMC}$ donc $\cos \widehat{AMC} = \dfrac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}}{MA \times MC}$

Or, $\overrightarrow{AM}(k-1;k;k)$ et $\overrightarrow{CM}(k;k-1;k)$. on en déduit que :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = k(k-1) + k(k-1) + k^2 = 3k^2 - 2k$

$\cos \widehat{AMC} = \dfrac{3k^2 - 2k}{\sqrt{\left((k-1)^2 + k^2 + k^2\right)}\sqrt{\left(k^2 + (k-1)^2 + k^2\right)}} = \dfrac{3k^2 - 2k}{3k^2 - 2k + 1}$

On pose pour $k \in [0;1]$: $f(k) = \dfrac{3k^2 - 2k}{3k^2 - 2k + 1}$

$\widehat{AMC}$ est maximum si et seulement si $\cos \widehat{AMC}$ est minimum car la fonction cosinus est décroissante sur $[\,0\,;\pi\,]$. On étudie donc les variations de la fonction f sur $[\,0\,;1\,]$

f est dérivable en tant que fonction rationnelle définie sur $[\,0\,;1\,]$ et $f'(k) = \dfrac{6k-2}{\left(3k^2 - 2k + 1\right)^2}$.

k	0		$\frac{1}{3}$		1
$f(k)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$

Donc f est minimum pour $k = \dfrac{1}{3}$ et $\cos \widehat{AMC} = -\dfrac{1}{2}$.

Comme $\widehat{AMC}$ est compris entre 0 et π alors $\widehat{AMC} = \dfrac{2\pi}{3} = 120°$

3ème solution : Géométrie et trigonométrie dans l'espace

Comme le triangle AMC est isocèle en M et I est le milieu de $[AC]$,

$\widehat{AMC}$ est maximum si et seulement si $\widehat{AMI}$ est maximum.

Or $\widehat{AMI} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction sinus est strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc

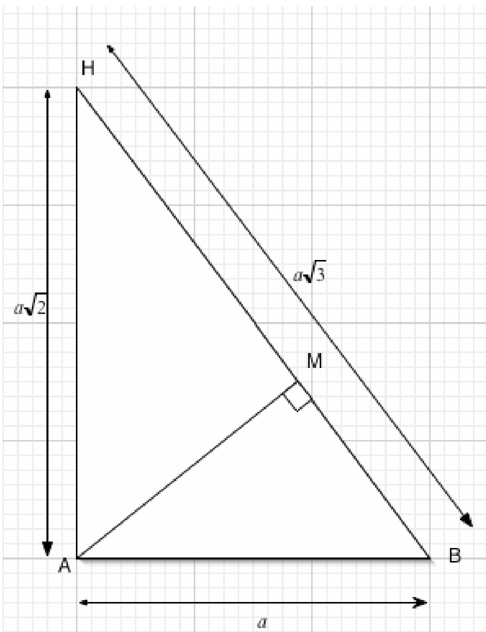
$\widehat{AMI}$ est maximum si et seulement si $\sin\widehat{AMI}$ est maximum.

De plus $\sin\widehat{AMI} = \dfrac{AI}{AM}$ et comme AI est constant , $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$\sin\widehat{AMI}$ est maximum si et seulement si AM est minimum

si et seulement si M est le projeté orthogonal de A sur $[BH]$

(puisque M décrit le segment $[BH]$).



Aire de $ABH = \dfrac{AM \times BH}{2} = \dfrac{a\sqrt{2} \times a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

donc $AM = a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

De plus, $\sin\widehat{AMI} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $\widehat{AMI} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\widehat{AMI} = \dfrac{\pi}{3}$

et $\widehat{AMC} = \dfrac{2\pi}{3} = 120°$