

Hyperbole et orthocentre

Fiche élève

On désigne par \mathcal{H} l'hyperbole représentative de la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{k}{x}$ où k est un réel non nul.

On place trois points A, B et C sur l'hyperbole \mathcal{H} et on s'intéresse à l'orthocentre du triangle ABC.

Partie A. Explorer la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. Créer un réel k variant entre -5 et 5 avec un pas de $0,1$.
2. Créer la représentation graphique de la fonction f .
3. Créer le triangle ABC et son orthocentre D.
4. Quelle conjecture est-il possible de faire ? Comment la mettre à l'épreuve ?

Partie B. Démonstration de la conjecture en s'aidant du logiciel Maxima

1. On appelle a , b et c les abscisses respectives des points A, B et C.
Quelles sont leurs ordonnées en fonction de k ?
2. Définir ces trois points dans Maxima ainsi que le point $D(x; y)$.
3. Comment peut-on traduire que le point D est l'orthocentre du triangle ABC ?
4. En déduire un système d'équations permettant de calculer les coordonnées du point D, puis résoudre ce système à l'aide Maxima.
5. Montrer alors que la conjecture émise en A-4 est exacte.

OUTILS MAXIMA

Pour définir un point $M(x_M; y_M)$, on tape la commande $M:[x_M, y_M]$.

Pour calculer le produit scalaire des vecteurs \overline{MN} et \overline{PQ} , on tape la commande $(N-M).(Q-P)$.