Tangentes communes à deux paraboles

Niveau

Première S

Prérequis

Construction de représentations graphiques de fonctions à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Création d'un point mobile sur une courbe.

Utilisation des outils de résolution de Maxima.

Pour plus de détails voir la grille de compétences jointe.

Objectifs

Modélisation d'une situation géométrique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour résoudre un système d'équations non linéaires.

Organisation pratique

La situation géométrique est simple à modéliser avec un logiciel de géométrie dynamique (le travail est plus facile à réaliser avec GeoGebra qu'avec Geoplan).

Cette modélisation permet de faire sentir la nécessité d'une recherche mathématique des solutions du problème après en avoir conjecturé l'existence ; l'étude mathématique débouchant sur la résolution d'un système d'équations à deux inconnues non linéaire et de degré 2, il est intéressant de pouvoir faire intervenir un logiciel de calcul formel afin de s'affranchir du problème de calcul.

Il est à noter qu'une organisation bien pensée des calculs avec Maxima permet de résoudre la totalité du problème sans passer par l'étape de la représentation graphique (cf. fiche professeur).

Équipe académique Mathématiques – Bordeaux - 2009

Tangentes communes à deux paraboles

Fiche élève

Soient f et g deux fonctions définies sur R par $f(x)=x^2-1$ et $g(x)=-x^2+2x-3$.

On appelle respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

Le but du problème est de déterminer les tangentes communes aux deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie A : Explorer la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. Créer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Créer un point A sur la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a $(-5 \leq a \leq 5)$, puis la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ce point.
3. En faisant déplacer le point A, conjecturer le nombre de tangentes communes aux deux courbes.
4. Déterminer les valeurs approchées à 0,01 près de a correspondant aux tangentes trouvées.

Partie B ; Étude mathématique

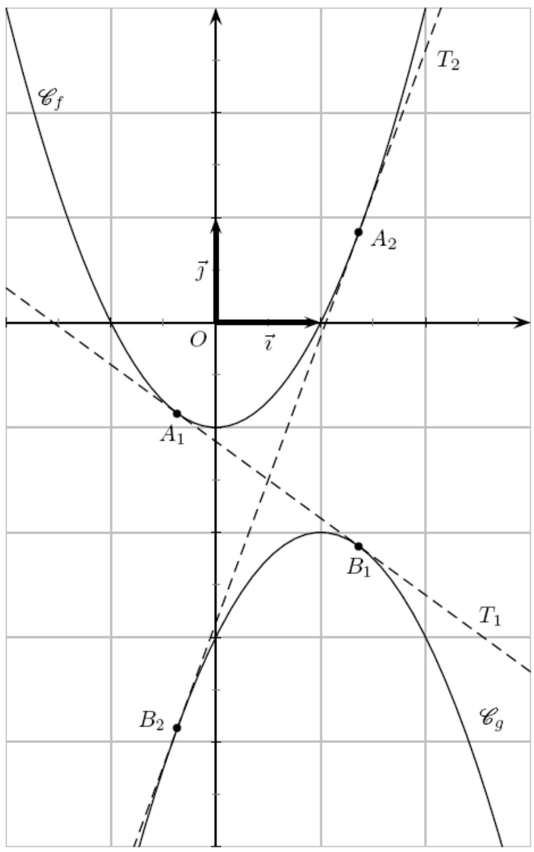
1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}_b$ à $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.
3. Quel système doivent vérifier les nombres a et b pour que les droites $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}_b$ soient confondues ?

Partie C : Résolution du problème avec le logiciel Maxima

1. En utilisant Maxima, résoudre le système précédent.
2. Calculer les coordonnées des points A_1 et A_2 pour lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est aussi tangente à $\mathscr{C}_g$.
3. Calculer les coordonnées des points B_1 et B_2 de $\mathscr{C}_g$ correspondant aux points A_1 et A_2 pour lesquels les tangentes sont communes aux deux courbes.
4. Déterminer les équations des deux tangentes $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ passant respectivement par A_1 et A_2.

Fiche professeur

Figure



Correction avec Maxima

1. On définit les fonctions f et g.

```
(%i1) f(x):=x^2-1;
```

(%o1) $$f(x) := x^2 - 1$$

```
(%i2) g(x):=-x^2+2*x-3;
```

(%o2) $$g(x) := -x^2 + 2\,x - 3$$

2. On détermine l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.

```
(%i25) taylor(f(x), x, a, 1);
```

(%o25) $$-1 + a^2 + 2\,a\,(x-a) + \ldots$$

```
(%i26) ratsimp(%);
```

(%o26) $$2\,a\,x - a^2 - 1$$

L'équation réduite de la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ est $y = 2\,a\,x - a^2 - 1$.

3. On détermine l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

```
(%i27) taylor(g(x), x, b, 1);
```

(%o27) $$-3 + 2\,b - b^2 + (-2\,b + 2)\,(x - b) + \ldots$$

```
(%i28) ratsimp(%);
```

(%o28) $$(2 - 2\,b)\,x + b^2 - 3$$

L'équation réduite de la tangente T_b à $\mathscr{C}_g$ est $y = (2 - 2\,b)\,x + b^2 - 3$.

4. Les deux droites T_a et T_b sont confondues si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux et leurs ordonnées à l'origine également ; on résout donc le système.

```
(%i29) solve([2*a=2-2*b,-a^2-1=b^2-3],[a,b]);
```

(%o29) $$[[a = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}], [a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}]]$$

On trouve qu'il existe deux tangentes communes, l'une correspondant à $a = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et l'autre correspondant à $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $b = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5. On a les abscisses des points de contact entre les courbes et les tangentes communes, on cherche leurs ordonnées.

```
(%i30) f(-(sqrt(3)-1)/2);
```

(%o30) $$\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4} - 1$$

```
(%i31) ratsimp(%);
```

(%o31) $$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Un des points de $\mathscr{C}_f$ d'intersection de la courbe avec la tangente est $A_1\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On cherche l'ordonnée du second point sur $\mathscr{C}_f$.

```
(%i32) f((sqrt(3)+1)/2);
```

(%o32) $$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}-1$$

```
(%i33) ratsimp(%);
```

(%o33) $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'autre point de $\mathscr{C}_f$ d'intersection de cette courbe avec une tangente est $A_2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. On fait de même avec les points de contact des tangentes communes avec $\mathscr{C}_g$.

```
(%i34) g((sqrt(3)+1)/2);
```

(%o34) $$-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}+\sqrt{3}-2$$

```
(%i35) ratsimp(%);
```

(%o35) $$\frac{\sqrt{3}-6}{2}$$

```
(%i36) g(-(sqrt(3)-1)/2);
```

(%o36) $$-\sqrt{3}-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}-2$$

```
(%i37) ratsimp(%);
```

(%o37) $$-\frac{\sqrt{3}+6}{2}$$

Les deux points d'intersection des tangentes avec $\mathscr{C}_g$ sont donc $B_1\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)$ et $B_2\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}+6}{2}\right)$.

7. Il reste à calculer les équations réduites des tangentes ; pour cela on remplace dans l'équation de T_a le nombre a par l'abscisse de A_1 puis par l'abscisse de A_2.

```
(%i39) subst(-(sqrt(3)-1)/2, a, %o26);
```

(%o39) $$\left(1-\sqrt{3}\right)x-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}-1$$

```
(%i41) expand(%);
```

(%o41) $$-\sqrt{3}\,x+x+\frac{\sqrt{3}}{2}-2$$

La tangente commune passant par A_1 a donc pour équation réduite : $y=\left(1-\sqrt{3}\right)x+\frac{\sqrt{3}}{2}-2$.

```
(%i42) subst((sqrt(3)+1)/2, a, %o26);
```

(%o42) $$\left(\sqrt{3}+1\right)x-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}-1$$

```
(%i43) expand(%);
```

(%o43) $$\sqrt{3}\,x+x-\frac{\sqrt{3}}{2}-2$$

La tangente commune passant par A_2 a donc pour équation réduite : $y=\left(1+\sqrt{3}\right)x-\frac{\sqrt{3}}{2}-2$.

8. Enfin on peut vérifier qu'en remplaçant b par les abscisses de B_1 et de B_2 dans l'équation de T_b, on trouve les mêmes équations de droites.

```
(%i44) subst((sqrt(3)+1)/2, b, %o28);
```

(%o44) $$\left(1-\sqrt{3}\right)\,x+\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}-3$$

```
(%i45) expand(%);
```

(%o45) $$-\sqrt{3}\,x+x+\frac{\sqrt{3}}{2}-2$$

```
(%i46) subst((-sqrt(3)+1)/2, b, %o28);
```

(%o46) $$\left(\sqrt{3}+1\right)\,x+\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{4}-3$$

```
(%i47) expand(%);
```

(%o47) $$\sqrt{3}\,x+x-\frac{\sqrt{3}}{2}-2$$