Triangle déformable

TP de Mathématiques – Classe de Première S

Énoncé

Soit ABCD un rectangle de centre O tel que AB = 8 et AD = 6.

On note I le milieu de [AB].

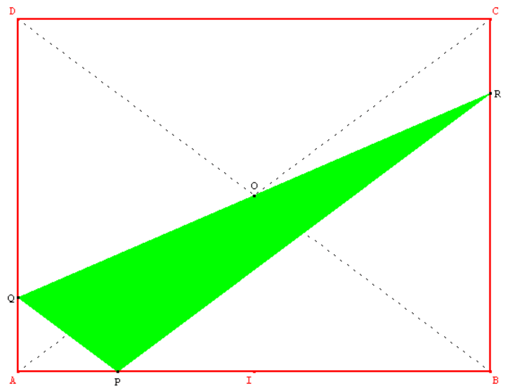
Soit P un point mobile sur le segment [AB].

La droite parallèle à la droite (BD) passant par P coupe la droite (AD) en Q, et, la droite parallèle à la droite (AC) passant par P coupe la droite (BC) en R.

L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure et de déterminer la position du point P rendant maximale l'aire du triangle PQR.

Étape 1 - Construction de la figure et conjectures

Création du rectangle ABCD



- Afficher le Repère Roxy (on peut utiliser)
- Créer le Point repéré A(0;0)
- Avec la touche bis , créer de même les points B(8;0), C(8;6) et D(0;6)
- Créer, Ligne, Segment, Définis par deux points ABBCCDDA
- Cacher le repère en cliquant sur

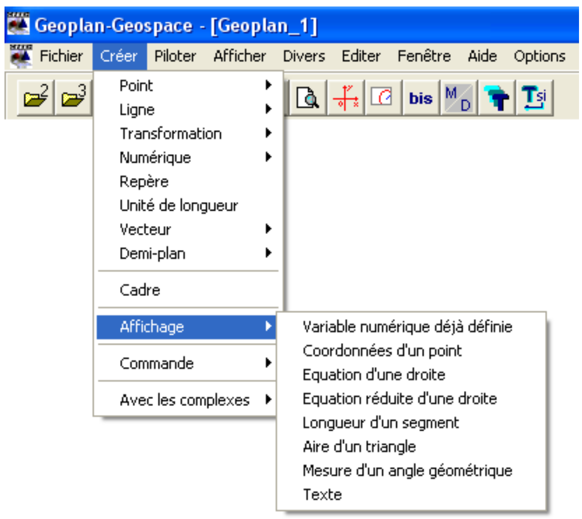
Création du point mobile

- Créer le Point libre Sur un segment et choisir P comme nom de ce point du segment AB

Poursuite de la création de la figure

- Utiliser le menu Créer

Création de la somme PQ + PR



- Créer, Numérique, Calcul géométrique, Longueur d'un segment et nommer pq la longueur du segment PQ
- Bis avec la longueur pr du segment PR
- Créer, Numérique, Calcul algébrique et nommer s la somme pq + pr

Affichage des valeurs (angle $\widehat{QPR}$, s = PQ + PR)

Affichage de l'aire du trapèze ABRQ

- Créer, Numérique, Calcul géométrique, Longueur d'un segment et nommer ab la longueur du segment AB
- Bis avec aq, br longueurs respectives des

segments AQ et BR

- Créer, Numérique, Calcul algébrique et nommer at le nombre (aq + br)×ab/2 qui est l'aire du trapèze ABRQ
- Créer, Affichage, Variable numérique déjà définie at.

Conjectures

- Quand P décrit [AB], quelles conjectures peut-on émettre au vu des résultats affichés?
- Afficher la valeur de l'aire du triangle PQR et conjecturer la position du point P pour laquelle l'aire du triangle PQR est maximale.

Étape 2 - Démonstration avec des outils géométriques

1. Démontrer que, lorsque P décrit [AB], l'angle $\widehat{QPR}$ reste constant.
2. a) Démontrer les égalités $\frac{PQ}{BD} = \frac{AP}{AB}$ et $\frac{PR}{AC} = \frac{PB}{BA}$.

   b) En déduire la valeur de la somme PQ + PR.
3. a) Démontrer que O est le milieu du segment [QR].

   b) En déduire l'aire du trapèze ABRQ.
4. a) Montrer que l'aire du triangle PQR est maximale lorsque le produit PQxPR est maximum.

   b) Déduire de la question 2b) l'égalité $PQ \times PR = 25 - (5 - PQ)^2$.

   c) En déduire la position du point P sur le segment [AB] rendant maximale l'aire du triangle PQR.

Étape 3 - Démonstration avec des outils d'Analyse

On pose QA = x.

1 Exprimer les distances PA, PQ, RC, BR, BP et PR en fonction de x.

2. En déduire la somme des distances PQ + PR et l'aire du trapèze ABRQ.

3. a) Calculer, en fonction de x, les aires des triangles APQ et BPR.

   b) En déduire que l'aire du triangle PQR est égale à $8x - \frac{4}{3}x^2$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto 8x - \frac{4}{3}x^2$ sur l'intervalle [0;6].

   d) En déduire la valeur de x rendant l'aire du triangle PQR maximale.

   e) Quelle est alors la position du point P sur le segment [AB] ?