Aire d'un triangle inscrit dans un carré

Lycée Camille Jullian, Bordeaux
Groupe Math&Info, Bordeaux 2001
Mise à jour : Groupe Maths&Info 2001

Niveau

Première ou terminale S.

Prérequis

1ère S : Sens de variation d'une fonction à partir du signe de la dérivée ; équation et inéquation du second degré ; équation cartésienne d'une parabole.

Terminale S : idem (avec paramètres) + éléments caractéristiques d'une parabole.

Objectifs

Faire la liaison entre un problème géométrique et sa traduction analytique.

Utiliser quelques outils fondamentaux de l'analyse.

Etudier une famille de fonctions (terminale).

Organisation pratique

Ordinateur tableau noir (professeur) avec tablette de rétroprojection et rétroprojecteur (une utilisation en salle informatique est également envisageable).

Imagiciels *AIRECAR1.G2W* (première), *AIRECAR2.G2W* (terminale) créés par le professeur et utilisables à l'aide du logiciel *GÉOPLANW* du *CREEM*.

Durée : 2 h en première S.

Description

L'écran de l'imagiciel est partagé en deux parties :

- celle de gauche illustre la situation géométrique (le carré et les variations des différents points de la figure, les points mobiles pouvant être M ou I suivant le niveau proposé).
- celle de droite contient la représentation graphique de la fonction A.

La parabole P représentant l'ensemble décrit par le point J peut s'obtenir par deux méthodes ; la copie d'écran de l'annexe : Document Professeur montre les tracés de L et P pour deux positions de I (les courbes se modifiant automatiquement par simple appui sur les touches de direction).

Bilan

Cette séance n'a été testée en classe qu'en première S.

L'extrême souplesse d'utilisation de *GÉOPLANW* permet de modifier les fichiers *AIRECAR1.G2W* et *AIRECAR2.G2W* de manière à les adapter très rapidement suivant les objectifs du professeur (2 parties distinctes dans chaque problème) et le niveau des élèves (première ou terminale).

Les élèves auront sans doute à être guidés pour le calcul de l'aire du triangle : des factorisations effectuées suffisamment tôt permettent d'éviter des calculs fastidieux.

Auteur

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Groupe Math&Info, Bordeaux 2001

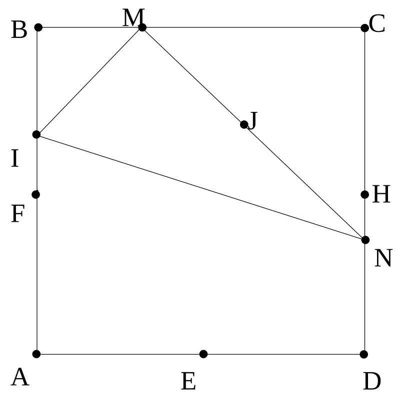
Mise à jour : Groupe Maths&Info 2001

Problème

On donne un carré ABCD de côté 2 cm.

Soit I un point de]AB[, M un point variable du segment]BC[, N le point de la droite (CD) tel que le triangle (IMN) soit rectangle en M, J le milieu de [MN].

Soit E, F et H les milieux respectifs de [AD], [AB] et [CD]. On se place dans le repère orthonormé (A, E, F). On note x l'abscisse du point M.



Le but du problème est double :

a. Déterminer les variations de l'aire du triangle (IMN) quand M varie sur [BC].

b. Déterminer le lieu P du point J quand M varie sur [BC].

Version 1 (Niveau première)

On suppose que I = F.

a. Calculer les coordonnées du point N en fonction de x.

Montrer que, lorsque x varie, N se déplace sur]CH], où H est le milieu de [CD].

b. Déterminer en fonction de x l'aire A(x) du triangle IMN. Étudier les variations de la fonction A sur son ensemble de définition.

c. Calculer les coordonnées x_J et y_J du point J en fonction de x. Exprimer y_J en fonction de x_J En déduire que P_1, courbe représentative de cette fonction, est une parabole. Préciser les coordonnées de son sommet.

Version 2 (Niveau terminale)

On note m l'ordonnée du point I.

a. Calculer les coordonnées du point N en fonction de x et m.

b. Montrer que, si $m<\frac{3}{2}$, alors, quelle que soit la position de M sur]BC[, N varie entre les points C et D.

c. On suppose dans cette question que $m<\frac{3}{2}$.

Déterminer en fonction de x et m l'aire $A_m(x)$ du triangle IMN.

Montrer qu'il existe un réel m_1 de l'intervalle $\left]0\,;\frac{3}{2}\right[$ tel que :

(1) pour tout m de l'intervalle $]0\,; m_1]$, la fonction A_m est monotone sur son ensemble de définition ;

(2) pour tout $m \in \left]m_1\,;\frac{3}{2}\right[$, l'équation $A'_m(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, avec $0 < x_1 < x_2 < \frac{2}{3}$.

Déduire de ce qui précède le sens de variation de la famille des fonctions A_m pour tout m de l'intervalle $\left]0\,;\frac{3}{2}\right[$.

d. Calculer les coordonnées x_J et y_J du point J en fonction de x et m. Exprimer y_J en fonction de x_J et m. En déduire que P_m, courbe représentative de cette fonction, est une parabole dont on précisera les éléments caractéristiques en fonction du paramètre m.

Document professeur

Les imagiciels comportent des commandes permettant d'obtenir les différents objets :

- *Touche **M** : pilotage du point M au clavier*
- *Touche **I** : pilotage du point I au clavier*
- *Touche **A** : affichage de la valeur de x et de l'aire de MNF*
- *Touche **B** : affichage de l'ordonnée m du point I*
- *Touche **S** : affichage du point S*
- *Touche **L** : affichage du lieu L du point S*
- *Touche **J** : affichage du point J*
- *Touche **T** : obtention de la trace du point J*
- *Touche **P** : affichage du lieu P du point J*

Dans le cadre de droite on construit le point S de coordonnées (x, $A(x)$).

On pourra faire afficher ou non ce point (touche **S**) ainsi que les valeurs de x et de $A(x)$ (touche **A**).

La représentation graphique de la fonction A s'obtient avec la touche **L**.

En faisant varier I sur [AB] (classe terminale), ce procédé permet de visualiser la famille des courbes représentatives des fonctions A_m. L'abscisse du point I peut être affichée (scalaire m : touche **B**).

Le tracé de P peut s'obtenir de deux façons :

- appui sur la touche **T** : on passe en mode *Trace* et en déplaçant le point M on visualise le lieu du point J (appuyer sue *Echap* pour quitter le mode Trace).
- Appui sur la touche **P** : on obtient l'affichage de la parabole.