MÉTHODE D'EULER

Problème

Étant donnés une fonction numérique f définie sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel, on veut déterminer une fonction F définie et dérivable sur I telle :

$$F'(x) = f(x) \text{ et } F(x_0) = y_0.$$

Méthode de détermination d'une solution approchée

Dans le cas où une primitive F de f sur I n'est pas connue, la méthode d'Euler consiste à obtenir une courbe proche de ce que serait la courbe représentative de F.

La fonction F est dérivable en x_0, si le quotient

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

a une limite réelle quand h tend vers 0. Cette limite est le réel $F'(x_0)$.

Alors, une valeur approchée de $F(x_0 + h)$ pour h suffisamment proche de 0 est :

$$F(x_0) + h\,F'(x_0).$$

Pour h voisin de 0 : $F(x_0 + h) \approx F(x_0) + h\,F'(x_0)$

ou encore : $F(x_0 + h) \approx y_0 + h\,f(x_0)$

on pose : $x_1 = x_0 + h$ et $y_1 = y_0 + h\,f(x_0)$ alors $y_1 \approx F(x_1)$.

De même : $F(x_1 + h) \approx F(x_1) + h\,F'(x_1)$

d'où : $F(x_1 + h) \approx y_1 + h\,f(x_1)$

on pose : $x_2 = x_1 + h$ et $y_2 = y_1 + h\,f(x_1)$ alors $y_2 \approx F(x_2)$.

On pose : $x_n = x_{n-1} + h$ et $y_n = y_{n-1} + h\,f(x_{n-1})$.

On a : $F(x_{n-1} + h) \approx F(x_{n-1}) + hF'(x_{n-1})$

ou encore : $F(x_{n-1} + h) \approx y_{n-1} + h\,f(x_{n-1})$

d'où : $y_n \approx F(x_n)$.

Pour h voisin de 0, les points M $(x_n\,;\,y_n)$ ainsi définis sont proches de la courbe de la primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale : $F(x_0) = y_0$.

Exemple

Soit l'équation différentielle :

$$y'(x) = \sqrt{x} \text{ avec } y(1) = \frac{2}{3} \text{ dans l'intervalle } [1\,;\,5\,]$$

En première S, une primitive de la fonction racine carrée n'est pas connue, on cherche donc une solution approchée par la méthode d'Euler.

Pour cela, on partage l'intervalle [1 ; 5] en intervalles de longueur h ;

On pose $x_0 = 1$ et $x_n = x_{n-1} + h$; $y_0 = \frac{2}{3}$ et $y_n = y_{n-1} + h\sqrt{x_{n-1}}$.

À l'aide d'un tableur, on construit les points de coordonnées (x_n ; y_n).

On peut aussi construire les points de coordonnées $\left(x_n \; ; \frac{2}{3} x_n \sqrt{x_n}\right)$.

Le graphique permet alors de comparer la courbe approchée à celle de la solution de l'équation différentielle proposée.