Introduction de la fonction exponentielle

Partie 1 : Étude d'une équation fonctionnelle

On considère une fonction f dérivable et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation :

(1) pour tous réels x et y : $f(x + y) = f(x)\, f(y)$.

En écrivant $f(x) = f(x - a + a)$, on montre que si la fonction f s'annule en a, elle est identiquement nulle. Cela entraîne que la fonction f ne s'annule jamais.

En faisant $x = 0$ dans la relation (1), on détermine la valeur de $f(0)$.

En faisant $x = y = t/2$ dans la relation (1), on établit que $f(t) \geq 0$ pour tout réel t.

On peut donc en déduire que $f(t) > 0$ pour tout t de $\mathbb{R}$.

Par dérivation de la fonction $y \mapsto f(x + y)$, on établit que :

(2) pour tout réel x : $f'(x) = f'(0)\, f(x)$.

On pose $\lambda = f'(0)$.la fonction f vérifie donc l'équation $f' = \lambda f$ sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Étude de la réciproque

On admet les deux résultats suivants :

1) Il existe une fonction qui vérifie

(2') pour tout réel x : $\varphi'(x) = \varphi(x)$ et $\varphi(0) = 1$.

2) Étant donnés deux réels a et b, il y a une unique solution à l'équation $f' = \lambda f$ qui vérifie $f(a) = b$.

En supposant (2'), on montre l'existence d'une solution à l'équation $f' = \lambda f$, en posant $f(x) = \varphi(\lambda x)$. On a alors l'unicité de la solution vérifiant $f(0) = 1$.

On montre alors que la fonction f ainsi définie vérifie la relation (1) :

on pose $g_1(x) = f(a + x)$ et $g_2(x) = f(a)\, f(x)$;

g_1 et g_2 vérifient toutes les deux l'équation $f' = \lambda f$, et on a $g_1(0) = g_2(0) = f(a)$;

d'après l'unicité, on a $g_1 = g_2$ et f vérifie donc la relation fonctionnelle (1).

Partie 3 : Méthode d'Euler

On s'intéresse plus particulièrement à la fonction φ solution de (2').

On pose $x_0 = 0$ et $x_n = x_0 + nh$ où h est le pas utilisé. On a $y_n = y_{n-1} + h\, y_{n-1} = (1+h)\, y_{n-1}$.

Avec un tableur, on visualise la courbe obtenue en joignant les points de coordonnées (x_n , y_n).

On peut aussi comparer avec la courbe représentative de la fonction exponentielle, et changer le pas h pour voir comment évolue la courbe.

Partie 4 : Notation exponentielle

La fonction φ vérifie la relation fonctionnelle (1).

Donc si n est un entier naturel, on montre que $\varphi(n) = (\varphi(1))^n$.

On a aussi pour n entier naturel, $\varphi(-n) = 1 / \varphi(n)$ donc pour tout entier relatif p on a $\varphi(p) = (\varphi(1))^p$.

On pose $e = \varphi(1)$ et on généralise la notation obtenue pour les entiers aux réels ; on obtient, pour tout x réel : $\varphi(x) = e^x$.