Quadrature de la parabole

Destination

Professeurs

Niveau

Terminale L, option facultative

Type :

Papier et TICE (GÉOPLANW). Fichier géoplan : QUA_PARA.G2W

Extraits du programme

Terminale L enseignement optionnel

Contenus	Modalités	Commentaires
Exponentielle et logarithme Fonction logarithme népérien, fonction exponentielle; notations ln, exp. Relations fonctionnelles. Dérivées. Représentations graphiques.	On introduira la fonction logarithme par quadrature de l'hyperbole et on fera le lien entre la fonction exponentielle et les suites géométriques.	Le logarithme décimal pourra être mentionné mais aucune connaissance spécifique n'est exigible.

Commentaires

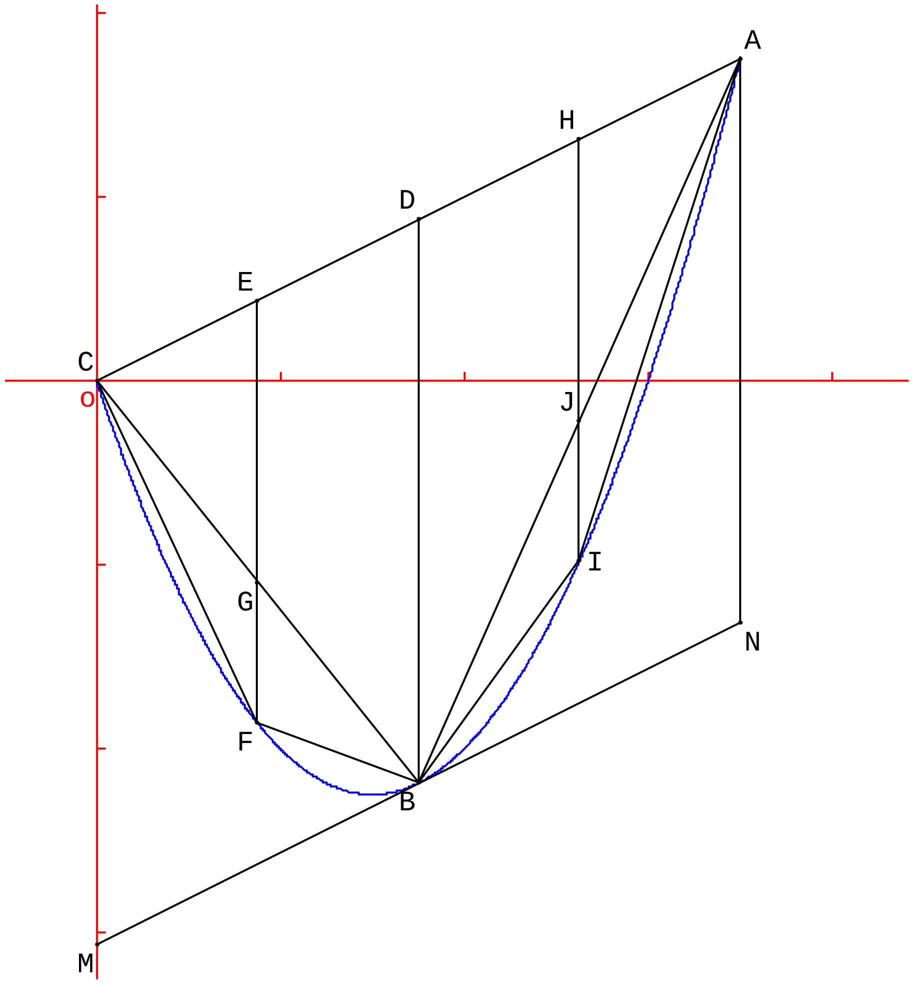
La quadrature de la parabole par Archimède est évoquée dans le document d'accompagnement. La démonstration historique est proposée ici en document papier ; elle est accompagnée d'une animation GÉOPLANW.

Auteur

Équipe Académique Mathématiques – Bordeaux - 2002

Quadrature de la parabole par Archimède

Archimède : -287 → -212 av JC.



Archimède démontre dans une lettre à Eratosthène que l'aire du domaine Γ compris entre l'arc CBA de parabole et le segment [AC] est égale à quatre tiers de l'aire du triangle ABC.

Il propose deux démonstrations, l'une mécanique et l'autre géométrique.

Nous nous intéressons à la démonstration géométrique.

Sur la figure, on part d'une parabole P qui passe par l'origine. A est un point de P. D est le milieu de [AC] et B est le point d'intersection de P et de la parallèle à (*oy*) passant par D.

On a alors un premier résultat qui est que la tangente à P en B est parallèle à (AC).

Ensuite on recommence, en construisant E milieu de [CD] et le point F sur la parabole.

Archimède commence par démontrer que FE = $\frac{3}{4}$BD

L'équation de P est de la forme

$y = ax^2 - bx$.

A est un point de P donc ses coordonnées sont de la forme

$\left(x_0 ; ax_0^2 - bx_0\right)$.

Celles de D sont alors : $\left(\frac{x_0}{2} ; \frac{x_0}{2}\left(ax_0^2 - bx_0\right)\right)$.

B a la même abscisse que D et son ordonnée est

$a\frac{x_0^2}{4} - b\frac{x_0}{2}$

d'où $\overline{BD} = a\frac{x_0^2}{4}$ étant le milieu de [CD],

son abscisse est $\frac{x_0}{4}$

et par un même raisonnement que précédemment on obtient :

$\overline{FE} = \frac{3}{16}ax_0^2$.

On obtient bien le résultat proposé.

Archimède démontre ensuite que : Aire(CFB) = $\frac{1}{4}$ Aire(CBD)

E est le milieu de [CD] et G est le milieu de [CB] ;on a donc :

$\frac{\text{aire(CFG)}}{\text{aire(CEG)}} = \frac{GF}{GE}$, puis $\frac{\text{aire(CEG)}}{\text{aire(CBD)}} = \frac{EG}{2DB}$

D'où, $\frac{\text{aire(CFG)}}{\text{aire(CBD)}} = \frac{GF}{2DB}$, puis $\frac{\text{aire(CFB)}}{\text{aire(CBD)}} = \frac{GF}{DB}$.

Or, d'après ce qui précède,

$FE = \frac{3}{4}DB$ et $GE = \frac{1}{2}BD$.

Donc $FG = \frac{1}{4}BD$, et on a le résultat.

On note H le milieu de [DA] et I le projeté de H sur la parabole parallèlement à (oy).

L'aire totale des deux triangles inscrits CFB et BIA est donc le quart de l'aire du triangle ABC. On itère le procédé et en prenant l'aire du triangle ABC comme unité, on obtient les sommes

$1 + \frac{1}{4}$; $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$; etc.

qui mesurent des aires de plus en plus proches de l'aire de Γ.

Archimède montre que cette somme est égale à $\frac{4}{3}$

On note $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots.. + \frac{1}{4^n}$.

En utilisant le fait que pour tout entier p non nul, on a:

$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{3 \times 4^p} = \frac{1}{3 \times 4^{p-1}}$,

Archimède montre que : $S_n + \frac{1}{3 \times 4^n} = \frac{4}{3}$.

Donc on a : $S_n < \frac{4}{3}$.

Soit L la somme infinie.

Supposons que $L > \frac{4}{3}$. Alors $L = \frac{4}{3} + d$.

Si L peut être approché d'aussi près qu'on veut par S_n, il existe n tel que $L - S_n < d$, mais alors $L - d < S_n < \frac{4}{3}$.

Ceci contredit l'hypothèse.

Supposons que $L < \frac{4}{3}$. Alors $L = \frac{4}{3} - d$.

Pour n assez grand, $\left(\frac{1}{4}\right)^n < d$.

Alors $S_n + d < L + d$, d'où : $\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} + d < \frac{4}{3}$.

Donc : $d < \frac{1}{3 \times 4^n}$, ce qui est impossible puisque $\left(\frac{1}{4}\right)^n < d$.

Conclusion $L = \frac{4}{3}$.