

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GRAPHS QUELQUES EXERCICES D'APPLICATION

*Le but principal de cette série d'exercices est de servir de « source d'inspiration ».
Bon nombre de ces exercices peuvent être à l'origine de toute une « famille » d'exercices
que l'enseignant n'aura aucun mal à « générer »...*

1. NOTIONS DE BASE

1.1. Modélisation

Exercice 1. Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».

Exercice 2. Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Exercice 3. Trois maris jaloux et leurs épouses souhaitent traverser une rivière. Ils disposent d'une barque qui ne peut transporter plus de deux personnes à la fois. Comment doivent-ils procéder, sachant qu'aucune femme ne doit rester en compagnie d'un ou deux hommes sans que son mari soit présent ?

Montrez que ce problème n'a pas de solution si les couples sont au nombre de 4.

Exercice 4. On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Comment doit-on faire ?

Exercice 5. (Jeu de Fan Tan) Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. A tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

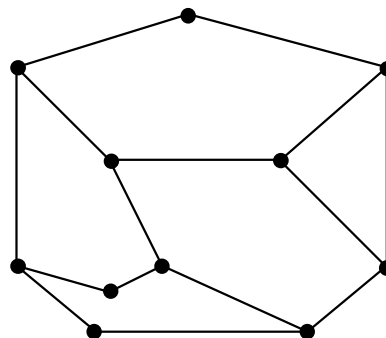
- ◆ Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.
- ◆ Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?
- ◆ Mêmes questions avec 3 tas de 3 allumettes.

Exercice 6. Essayez d'exprimer (et non nécessairement de résoudre...) en termes de graphes les problèmes suivants :

- ◆ Peut-on placer huit dames sur un échiquier sans qu'aucune d'elles ne puisse en prendre une autre ?
- ◆ Un cavalier peut-il se déplacer sur un échiquier en passant sur chacune des cases une fois et une seule ?
- ◆ Combien doit-on placer de dames sur un échiquier 5x5 afin de contrôler toutes les cases ?

Exercice 7. Le graphe ci-contre représente le plan des couloirs d'un musée. Un gardien placé dans un couloir peut surveiller les deux carrefours placés à ses extrémités. Combien de gardiens sont nécessaires (et comment les placer) afin que tous les carrefours soient surveillés ?

Si l'on place maintenant les gardiens aux carrefours, en supposant qu'un tel gardien peut surveiller tous les couloirs amenant à ce carrefour, combien de gardiens sont nécessaires ?



Exercice 8. Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui à rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

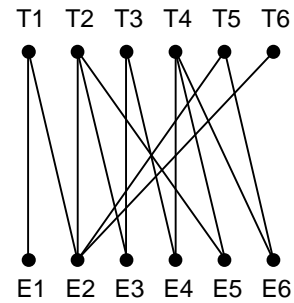
- ◆ Quel est l'ordre d'arrivée des élèves à la bibliothèque ?
- ◆ leur ordre de départ ?

élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

Exercice 9. Dans le graphe biparti ci-contre, les sommets T1, ..., T6 représentent des travailleurs et les sommets E1, ..., E6 des emplois.

Une arête relie un travailleur à un emploi si le travailleur a les qualifications nécessaires pour occuper cet emploi.

Comment affecter les emplois aux travailleurs afin de minimiser le nombre de sans-emploi ?



Exercice 10. Chaque jour, un groupe de 12 enfants fait une promenade, par rang de deux. Combien de jours peuvent-ils se promener si l'on souhaite qu'un enfant n'ait jamais deux fois le même voisin ? Et si maintenant la promenade se fait par rang de trois ?

Exercice 11. Soit X un ensemble de lapins, et G un graphe orienté ayant X pour ensemble de sommets. On dit que G est un « graphe de parenté » si les arcs de G codent la relation « être l'enfant de »... Quelles conditions doit nécessairement vérifier G pour pouvoir être un graphe de parenté ?

1.2. Degré des sommets

Exercice 12. On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré trois.

- ◆ Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, 7 sommets.
- ◆ Qu'en déduisez-vous ?
- ◆ Prouvez-le !

Exercice 13. La situation est-elle identique pour les graphes dont tous les sommets sont de degré 4 ?

Exercice 14. Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est *graphique* s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite (par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite 2,2,2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

- ◆ 3, 3, 2, 1, 1
- ◆ 3, 3, 2, 2
- ◆ 5, 3, 2, 1, 1, 1
- ◆ 3, 3, 1, 1
- ◆ 4, 2, 1, 1, 1, 1
- ◆ 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1

Trouvez deux graphes *distincts* (c'est-à-dire non isomorphes¹) correspondant à la suite 3, 2, 2, 2, 1.

Exercice 15. Pour les graphes orientés, il faut considérer des suites de couples d'entiers (le premier élément d'un couple correspond au degré entrant, le second au degré sortant). Les suites suivantes sont-elles des suites graphiques ?

- ◆ (0,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,0)
- ◆ (0,2), (1,1), (1,1), (2,0)
- ◆ (1,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,1)
- ◆ (1,2), (1,2), (2,1), (2,1)
- ◆ (0,2), (1,1), (1,1), (1,1)
- ◆ (1,2), (1,2), (2,1), (2,2), (1,1)

Exercice 16. Essayez de construire un graphe non orienté ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés distincts. Qu'en déduisez-vous ?

¹ deux graphes G1 et G2 sont isomorphes s'il existe une bijection f entre leurs ensembles de sommets qui préserve les arêtes (f(x)f(y) est une arête de G2 si et seulement si xy est une arête de G1).

Exercice 17. Montrez que dans un groupe de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).

Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

Exercice 18. Montrez que dans un groupe de 9 personnes, 4 se connaissent mutuellement ou 3 ne se connaissent pas.

Cela est-il toujours vrai dans un groupe de 8 personnes ?

Exercice 19. Montrez que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

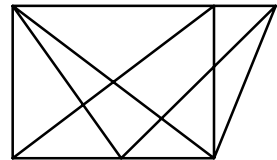
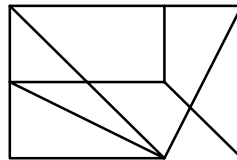
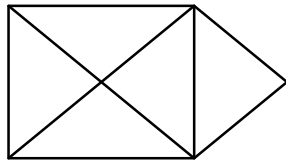
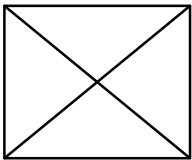
Exercice 20. Un groupe de personnes est tel que

- (i) chaque personne est membre d'exactly deux associations,
- (ii) chaque association comprend exactement trois membres,
- (iii) deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.

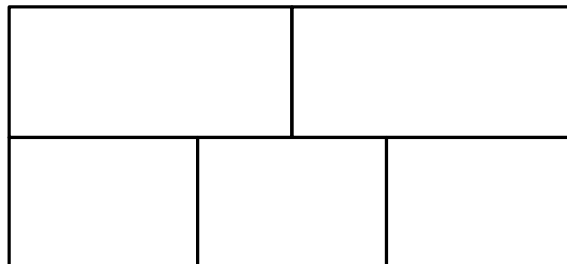
Combien y a-t-il de personnes ? d'associations ?

1.3. Graphes eulériens

Exercice 21. Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !...) ? Pourquoi ?



Exercice 22. Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante ?



Exercice 23. Est-il possible de traverser les sept ponts de la ville de Königsberg en empruntant deux fois chaque pont, dans un sens puis dans l'autre ?

Exercice 24. Soit G un graphe non Eulérien. Est-il toujours possible de rendre G Eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Exercice 25. On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

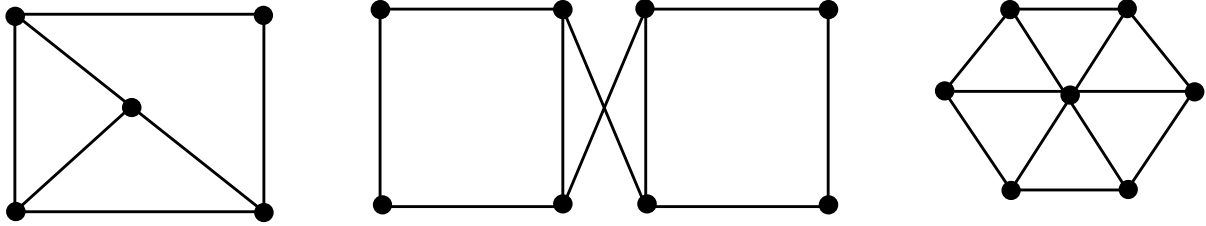
- ◆ En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
- ◆ Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
- ◆ Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
- ◆ Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n , est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

2. PROBLÈMES DE COLORATION

Exercice 26. Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut être colorié en moins de trois couleurs.

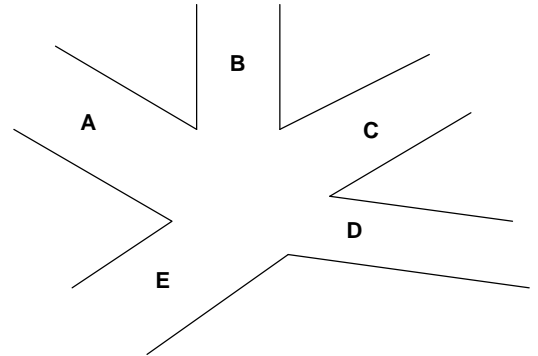
- ◆ Construire un graphe sans triangle qui nécessite également trois couleurs.
- ◆ Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K_4 nécessitant 4 couleurs ?
- ◆ un graphe sans K_5 nécessitant 5 couleurs ?

Exercice 27. Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants :



Exercice 28. Le schéma ci-contre représente un carrefour. Le tableau suivant précise les « franchissements » possibles de ce carrefour.

En arrivant par...	A	B	C	D	E
Il est possible d'aller en...	C,E	A,E,D	A,D	C,A	C,D

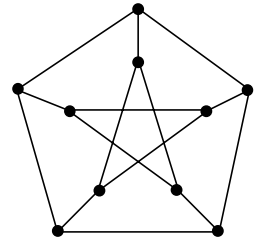


Les franchissements A-C et B-E ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément...

- ◆ Modélisez ces incompatibilités à l'aide d'un graphe dont les sommets représentent les franchissements possibles et les arêtes les incompatibilités entre franchissements.
- ◆ Proposez une coloration du graphe ainsi obtenu.
- ◆ Que peut-on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ?
- ◆ À quoi peut correspondre le nombre chromatique de ce graphe ?

Exercice 29. On cherche à colorier le graphe ci-contre en utilisant des entiers positifs de façon telle que deux sommets voisins ont des couleurs dont la différence, en valeur absolue, est au moins égale à trois.

- ◆ Proposez une coloration de ce graphe. Quel est le plus grand entier utilisé ?
- ◆ Peut-on faire mieux ?



- ◆ Maintenant, on souhaite que, de plus, deux sommets à distance deux aient des couleurs dont la différence, en valeur absolue, est au moins égale à deux. Quelle est la meilleure coloration possible de ce graphe ?

Exercice 30. Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui à rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E	B,C,E,F

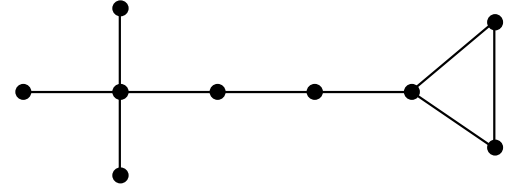
De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

3. PROBLÈMES DE CHEMINS

Exercice 31. Un *tournoi* est un graphe orienté tel que toute paire de sommets est reliée par un arc, dans un sens ou dans l'autre (mais pas dans les deux sens).

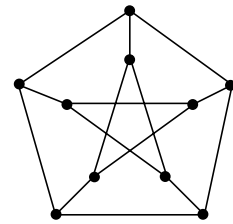
- ◆ Pourquoi, selon vous, appelle-t-on de tels graphes des tournois ?
- ◆ Montrez que si un tournoi contient un circuit de longueur k , alors il contient également des circuits de longueur k' , pour tout $k' < k$ (une « preuve » à l'aide d'un dessin suffit...).
- ◆ Dessinez un tournoi à 6 sommets ne possédant pas de circuit de longueur 4.

Exercice 32. Un robot se promène sur le graphe ci-contre. Partant d'un sommet quelconque s , appelé *sommet de stockage*, il doit déposer un cube sur chacun des autres sommets. Il possède suffisamment de cubes sur le sommet de stockage, mais ne peut transporter qu'un cube à la fois (il doit donc repasser par le sommet de stockage avant de livrer un autre cube). Calculer, pour chacun des sommets du graphe, le trajet minimum que doit parcourir le robot si ce sommet est sommet de stockage. Quel est le « meilleur » sommet de stockage ?



Exercice 33. Considérons le graphe ci-contre.

- ◆ Combien de cycles simples (sans répétition d'arêtes) de longueur 5 ce graphe contient-il ?
- ◆ De longueur 6 ?
- ◆ De longueur 8 ?
- ◆ De longueur 9 ?

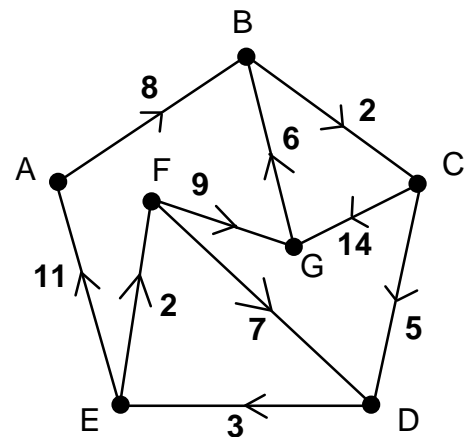


Exercice 34. Construire le graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 24 et dont les arcs relient x à y lorsque x divise y . De plus, les arcs sont valués par le quotient y/x (ainsi, l'arc allant de 3 vers 15 a la valeur 5).

- ◆ Comment reconnaît-on dans ce graphe un nombre premier ?
- ◆ Comment retrouver dans ce graphe la décomposition d'un nombre en facteurs premiers ?

Exercice 35. Remplir le tableau ci-dessous qui, pour le graphe valué ci-contre, donne la valeur du plus court chemin d'un sommet à un autre.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							



Exercice 36. Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe précédent, à partir du sommet C, puis à partir du sommet F.

Exercice 37. La compagnie Europ'Air dessert différentes villes européennes. Le tableau ci-contre donne les durées de vol entre ces différentes villes.

- ◆ Comment déterminer le trajet le plus rapide entre deux villes ?
- ◆ Comment modifier la méthode précédente afin de prendre en compte la durée des escales dans les différentes villes ?

	A	B	C	D	E
A		1h30	2h00		2h15
B	1h40				3h00
C	2h20			2h55	
D			3h20		1h05
E	2h25	3h10	1h10		

4. PROBLÈMES D'ORDONNANCEMENT

Exercice 38. La mise en exploitation d'un nouveau gisement minier demande la réalisation d'un certain nombre de tâches. Le tableau suivant représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité.

Tâche	Description	Durée (en jours)	Tâches antérieures
A	obtention d'un permis d'exploitation	120	-
B	établissement d'une piste de 6 km	180	A
C	transport et installation à pied d'œuvre de 2 sondeuses	3	B
D	création de bâtiments provisoires pour le bureau des plans, le logement des ouvriers sondeurs	30	B
E	goudronnage de la piste	60	B
F	adduction d'eau	90	D
G	campagne de sondage	240	C,D
H	forage et équipement de trois puits	180	E,F,G
I	transport et installation au fond du matériel d'exploitation	30	J,H
J	construction de bureaux et logements, ouvriers et ingénieurs	240	E,F,G
K	tracé et aménagement du fond	360	J,H
L	construction d'une laverie	240	J,H

- ◆ Déterminez les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque tâche.
 - ◆ Déterminez le temps minimum de réalisation de l'ensemble.
- (On pourra utiliser ici la méthode des potentiels métra (MPM), puis la méthode PERT).

Exercice 39. Tout ensemble de tâches peut faire l'objet d'un exercice similaire : construction d'un logement, rénovation d'une salle de bains, révisions pour le baccalauréat, etc.

5. PROBLÈMES D'AUTOMATES

5.1. automates simples

Exercice 40. Proposez un automate déterministe permettant de reconnaître un entier positif inférieur ou égal à 138.

Exercice 41. Proposez des automates déterministes permettant de reconnaître :

- ◆ les multiples de 3,
- ◆ les multiples de 9,
- ◆ les multiples de 10,
- ◆ les multiples de 100,
- ◆ les multiples de 1000,
- ◆ les multiples de 25,
- ◆ les multiples de 50,
- ◆ les multiples de 250,
- ◆ les multiples de 6

Exercice 42. Proposez un automate déterministe permettant de reconnaître un horaire donné sous la forme 12:15.

Exercice 43. Proposez un automate déterministe permettant de reconnaître une date donnée sous la forme 03/02 (pour le 3 février), en se limitant à l'année en cours...

5.2. automates avec actions

Exercice 44. Un élève peut être considéré comme un système très particulier : lorsqu'il est interrogé oralement par un enseignant, il répond s'il est en forme et ne répond pas s'il est fatigué. Après avoir été interrogé, un élève en forme devient fatigué. Lorsqu'une interrogation surprise se présente, l'élève en forme remet une bonne copie, l'élève fatigué une copie plutôt moyenne. Après une interrogation surprise, tous les élèves sont fatigués pour le reste de la journée ! Le soir, tous les élèves se reposent et arrivent en forme le lendemain matin. Modélisez cette situation à l'aide d'un automate avec actions (on pourra dans un premier temps établir la liste des événements « subis » par un élève et la liste des actions réalisées par celui-ci en réponse à ces événements...)

Exercice 45. Un téléphone portable est finalement un objet assez simple... Quand vous le sortez de son emballage, il est éteint et toutes les touches sont sans effet... sauf la touche « ON », qui émet un

- « bip » sympathique et voici votre téléphone allumé... Dorénavant, toutes les touches émettent un « bip » (c'est amusant ;-)... même la touche « OFF » qui, pourtant, éteint votre téléphone...
- ◆ Modélisez le fonctionnement de ce téléphone portable à l'aide d'un automate avec actions.

Exercice 46. On n'arrête pas le progrès... Votre téléphone est également muni d'une touche « MUTE » qui, naturellement, n'a aucun effet si votre téléphone est éteint, mais qui peut faire passer votre téléphone (allumé en mode normal) en mode silencieux (après avoir émis cependant un « bip » ;-). En mode silencieux, les touches n'émettent plus de « bip », sauf la touche « MUTE » qui, du coup, fait repasser votre téléphone en mode normal... Là où l'on prend vraiment conscience du progrès accompli, c'est que lorsque vous rallumez un téléphone qui a été éteint en mode normal, il se rallume en mode normal, alors que s'il a été éteint en mode silencieux, il se rallume en mode silencieux (en émettant cependant un « bip »...). Étonnant, non ?

- ◆ Proposez un nouvel automate avec actions pour ce téléphone « moderne »...

Exercice 47. Le Kidor-Dyn est un animal fabuleux que peu d'entre nous ont eu le loisir de croiser sur leur chemin... À sa naissance (vers 7h00 du matin), le Kidor-Dyn a faim et soif. Lorsqu'il passe près d'une rivière, il boit, et cela lui suffit pour la journée. Lorsqu'il croise une belette, il la croque, et cela lui suffit pour la journée. Il peut cependant, au hasard des rencontres, croquer une seconde belette mais jamais trois dans la même journée. Lorsque le soleil se couche, le Kidor-Dyn fait sa toilette et s'endort, qu'il ait croisé ou pas de rivière ou de belette dans la journée... Le lendemain, il a à nouveau faim et soif, à moins qu'il n'ait rêvé, au cours de la nuit, de pluie (auquel cas il n'a pas soif) ou de belette (auquel cas il n'a pas faim). Par ailleurs, chaque fois qu'un enfant passe à proximité de lui dans la journée, le Kidor-Dyn chante une chanson...

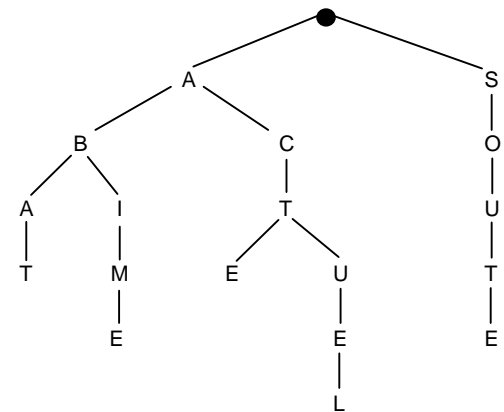
- ◆ Modéliser la vie trépidante du Kidor-Dyn à l'aide d'un automate avec actions.

6. PROBLÈMES DIVERS

6.1. Arbres, arbres couvrants

Exercice 48. Combien d'arbres différents existe-t-il avec 5 sommets ? avec 6 sommets ? avec 7 sommets ?

Exercice 49. L'arbre ci-contre code un « dictionnaire » composé des cinq mots ABAT, ABIME, ACTE, ACTUEL et SOUTE.

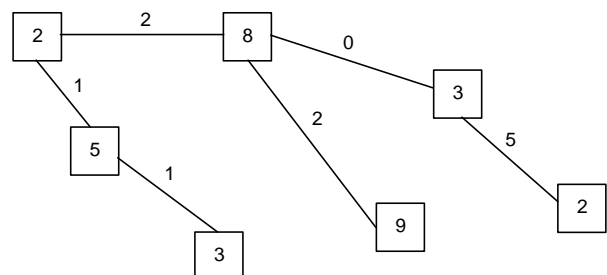


- ◆ On souhaite inclure dans ce dictionnaire le mot SORT. Que devient l'arbre ?
- ◆ On souhaite maintenant inclure le mot SOU. Or, le mot SOUTE étant déjà présent, le mot SOU est « déjà construit » dans cet arbre... Comment distinguer alors le mot SOU du mot ABI qui, lui, n'appartient pas au dictionnaire ?
- ◆ Expliquez comment, à l'aide d'un tel arbre, il est possible de déterminer si un mot donné appartient ou non au dictionnaire.

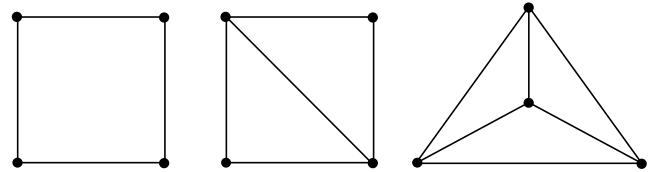
Exercice 50. Le schéma ci-contre représente la carte d'un groupe de villages. Les sommets sont des villages et les arêtes des chemins reliant les villages. Pour chaque village, la valeur du sommet correspond au nombre d'enfants du village en âge d'être scolarisé. Pour chaque chemin reliant deux villages, la valeur correspond au nombre de rivières que doivent traverser à la nage les piétons empruntant ce chemin. On souhaite choisir l'un de ces villages pour y construire une école. Le critère de choix principal

est la sécurité : on veut minimiser le nombre de traversées à la nage !...

- ◆ Dans quel village doit-on construire cette école ?



Exercice 51. Combien d'arbre couvrants différents les graphes ci-contre possèdent-ils ?



6.2. Graphes hamiltoniens

Exercice 52. Un groupe de 9 élèves se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Combien de jours peuvent-ils se réunir si l'on souhaite que personne n'ait deux fois le même voisin ?

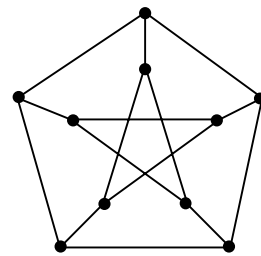
Même question avec 10 élèves, élèves, n élèves...

Toujours avec 9 élèves, mais cette fois avec 2 tables, l'une de 4 places, l'autre de 5... Avec trois tables de 3 places ?...

Exercice 53. Cette fois, ces réunions quotidiennes concernent un groupe de 12 élèves, 6 filles et 6 garçons. On souhaite toujours que personne n'ait deux fois le même voisin, mais, cette fois, on souhaite également que chaque fille soit entourée de deux garçons... Combien de jours peuvent-ils se réunir ?

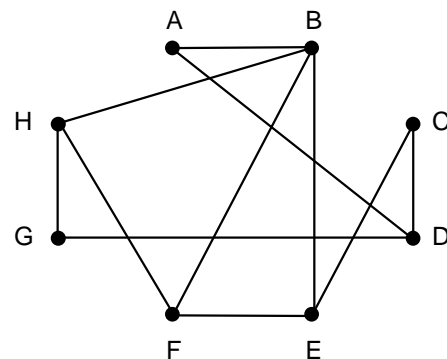
Exercice 54. Est-il possible de parcourir le graphe ci-contre

- ◆ en passant une et une seule fois par chacun des sommets et en revenant à son point de départ ?
- ◆ sans revenir nécessairement à son point de départ ?



Exercice 55. Un groupe de huit personnes se retrouve pour dîner. Le graphe ci-contre précise les « incompatibilités d'humeur » entre les personnes de ce groupe (une arête reliant deux personnes indique que celles-ci s'entendent très modérément...).

- ◆ Proposez un plan de table (la table est ronde) pour ce groupe en évitant de placer côte à côte deux personnes « incompatibles ».
- ◆ Combien y a-t-il de solutions possibles ?



7. BIBLIOGRAPHIE

BERGE, Claude. *Graphes et Hypergraphes*. éd. Dunod, Paris (1970).

GONDRAN, Michel, et MINOUX, Michel. *Graphes et Algorithmes*. éd. Eyrolles, Paris (1979).

LABELLE, Jacques. *Théorie des graphes*. éd. Modulo, Québec (1981).

ROY, Bernard. *Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales*. Tome 1 : Notions et résultats fondamentaux. éd. Dunod, Paris (1969).

ROY, Bernard. *Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales*. Tome 2 : Applications et problèmes spécifiques. éd. Dunod, Paris (1970).