

Initiation aux graphes

Exercice 1

Dans une «toute petite ville », il y a 15 appareils téléphoniques. Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec exactement 5 autres ?

Solution : On construit un graphe, ou du moins on imagine un graphe correspondant au problème : les sommets sont les appareils et les arêtes sont les fils ; les sommets ont tous un degré impair et il y en a un nombre impair : c'est impossible.

Résultats : Dans un graphe non orienté :

- le nombre d'arêtes est égal à la somme des degrés des sommets divisée par deux ;
- la somme des degrés des sommets est paire.

Le nombre de sommets impairs d'un graphe non orienté est donc toujours pair.

Exercice 2

Dans un tout petit pays, il y a 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute. Montrer qu'il est possible de se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes.

Solution : Supposons qu'on ne puisse pas relier par autoroute la capitale C à la ville A. De la capitale C, il part au moins 7 autoroutes aboutissant chacune à une ville différente. De la ville A, il part au moins 7 autoroutes aboutissant chacune à une ville différente. On a donc deux réseaux de 8 villes différentes qui n'ont pas de ville en commun. Il y a donc au moins 16 villes. Contradiction.

Définition : Un graphe non orienté est dit connexe si, pour chaque paire de sommets, il existe au moins un chemin qui les relie. Le graphe cet exercice est connexe.

Exercice 3

Montrer que le nombre de personnes ayant vécu ou qui vivent encore sur la terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de mains est pair.

Solution : C'est une application du résultat de l'exercice 1, pour laquelle on ne peut pas espérer construire le graphe.

Exercice 4

Un tournoi de foot se joue entre cinq équipes A, B, C, D et E. Chaque équipe rencontre une et une seule fois chacune des autres. Les résultats sont les suivants :

a battu		A	A	B	B	B	C	D	E	E	E
		B	C	C	D	E	D	A	A	C	D

L'objectif est d'établir un classement des équipes.

- 1) Traduire ces résultats à l'aide d'un graphe.
- 2) Traduire ce graphe à l'aide d'une matrice M (matrice associée au graphe).
- 3) Calculer M^2 ; interpréter cette matrice.
- 4) Calculer $S = M + M^2$; en déduire un classement des cinq équipes.

On utilise cette méthode dans les problèmes de réseaux de communication.

On définit des degrés de communications que l'on détermine grâce aux puissances de la matrice booléenne associée au graphe.