Loi exponentielle

Extrait du problème de l'ESSEC de 1995.

On considère les arrivées successives des clients à un guichet.
Étant donnés deux nombres réels t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$, on note $N(t_1, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$ et $P(N(t_1, t_2) = n)$ la probabilité pour que n clients exactement se présentent au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$.
(Par convention, on posera $P(N(t_1, t_1) = 0) = 1$ et $P(N(t_1, t_1) = n) = 0$ lorsque $n \geq 1$).
On fait les hypothèses suivantes :

A) Étant donnés quatre nombres réels t_1, t_2, t_3, t_4 tels que $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, les variables aléatoires $N(t_1, t_2)$ et $N(t_3, t_4)$ sont indépendantes.
(*Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants*).

B) Pour tout entier naturel n, il existe une fonction continue $p_n : \mathbb{R}^+ \to [0 ; 1]$ telle que, pour tout couple de nombres réels (t_1, t_2) tels que $t_1 \leq t_2$:

$$P(N(t_1, t_2) = n) = p_n(t_2 - t_1).$$

(*Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que n clients se présentent entre les instants t_1 et t_2 dépend continûment de la durée $t_2 - t_1$*).

1°) Équation fonctionnelle des fonctions p_n
On considère dans cette question deux nombres réels positifs x, y.

a) Exprimer $P(N(0, x + y) = 0)$ en fonction de $P(N(0, x) = 0)$ et de $P(N(x, x + y)= 0)$, puis montrer que $p_0 (x + y) = p_0(x)\, p_0(y)$.
Déduire alors de la partie I, l'expression de $p_0(x)$ en posant $\lambda = -p_0'(0)$.

b) Établir plus généralement que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_n (x + y) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x) p_k(y).$$

2°) Loi de l'instant d'arrivée du premier client
On fixe un instant – origine et l'on note T_1 la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}^+$) indiquant l'instant d'arrivée du premier client à partir de cet instant – origine.

a) Justifier l'égalité des événements « $N(0, x) = 0$ » et « $T_1 > x$ ».
b) Déduire des résultats précédents la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire T_1 dont on reconnaîtra la loi.
c) Déterminer enfin l'espérance et la variance de T_1.

Ce problème peut être transposé dans le cadre de la radioactivité ; on cherche la loi de probabilité modélisant la durée de vie d'un noyau qui ne vieillit pas.
Les deux hypothèses A) et B) se traduisent par : les désintégrations des noyaux se font de façon indépendantes les unes des autres, et la probabilité conditionnelle qu'un noyau qui a existé jusqu'à l'instant t, se désintègre entre t_1 et t_2, ne dépend que de la différence $t_2 - t_1$.