LOIS CONTINUES

Passage du discret au continu

Notion de densité de probabilité

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, l'histogramme des fréquences est remplacé par une courbe (C) représentative d'une fonction f possédant les trois propriétés suivantes :

- f est positive sur $\mathbb{R}$;
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut être en un nombre fini de points ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, le polygone des fréquences cumulées croissantes est remplacé par la courbe (Γ) représentative de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt .$$

Cette fonction F vérifie les propriétés suivantes :

- F est continue sur $\mathbb{R}$;
- en tout point x_0 où f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$;
- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Paramètres

Pour une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité dont la densité est f, on définit la probabilité par :

$$p(\mathrm{X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt .$$

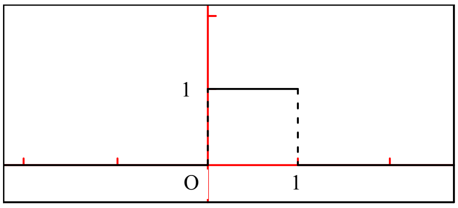
Son espérance mathématique est donnée par : $\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,dt$.

Sa variance est : $\mathrm{V(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \mathrm{E(X)}\right)^2 f(t)\,dt = \mathrm{E(X^2)} - \left(\mathrm{E(X)}\right)^2$.

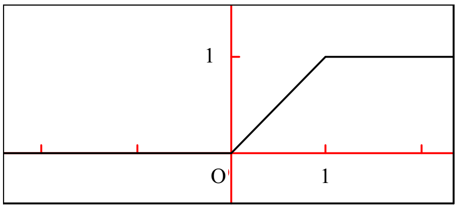
Caractéristiques de la loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi continue uniforme sur [a ; b] où $a \neq b$, si X a pour densité de probabilité la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a\,;b] \\ f(x) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - [a\,;b] \end{cases}$

On a alors les résultats suivants : E(X) = $\dfrac{a+b}{2}$ et V(X) = $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.



Densité de probabilité
sur [0 ; 1]



Fonction de répartition.

Loi exponentielle de paramètre a

Soit a un réel strictement positif et f la fonction de la variable t définie sur $\mathbb{R}$ par :

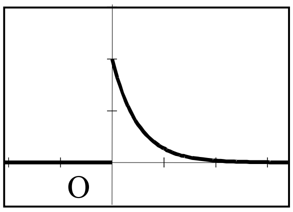
$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = a\,e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1) On se propose de démontrer que f est une densité de probabilité.
   a) Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.
   b) Pour tout x strictement positif, calculer, en fonction de x et de a, l'intégrale

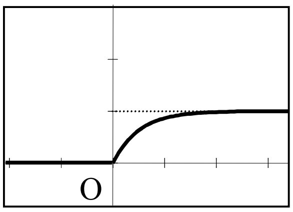
$$I(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x)$. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Conclure.

2) Soit X la variable aléatoire dont la densité de probabilité est f.
   a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   b) Calculer, en fonction de x et de a, l'intégrale $J(x) = \int_0^x t\,f(t)\,dt$.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} J(x)$. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt = \dfrac{1}{a}$.
   d) Calculer la variance de X.



Densité de probabilité (ici a = 2)



Fonction de répartition

De la loi uniforme à la loi exponentielle

Soit Y une variable aléatoire continue de loi uniforme sur [0 ; 1].
Démontrer que la variable aléatoire continue X définie, pour λ réel strictement positif, par :

$$\mathrm{X} = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\mathrm{Y})$$

suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Ce résultat permet de simuler une loi exponentielle : à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires (fonction Random, par exemple) on se donne un échantillon $y_1, y_2, \ldots y_n$ d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme continue sur [0 ; 1].

Alors les n valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ telles que : $x_\mathrm{i} = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y_i)$ forment un échantillon de taille n de la variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Discrétisation de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Posons Y la variable aléatoire définie par : Y = E(X) , partie entière de X.

$$\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \mathrm{P}(k \leq \mathrm{X} < k+1) = \int_k^{k+1} \lambda\, e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_k^{k+1} = \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{k}} - \mathrm{e}^{-\lambda(\mathrm{k}+1)}.$$

D'où, $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\,(\mathrm{e}^{-\lambda})^{k}$; Y suit donc une loi géométrique de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ (c'est une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}$).

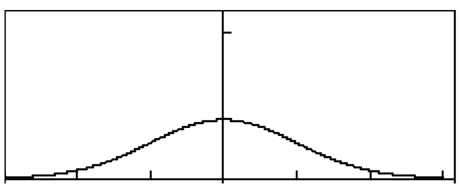
Caractéristiques de la loi normale

Une variable aléatoire X suit la *loi normale centrée réduite* si X a pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

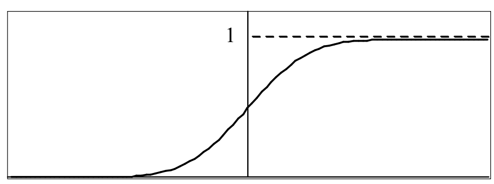
Une variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres m et σ, notée N(m, σ), si Y a pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$.

On remarque que dans ce cas, la variable aléatoire $\frac{\mathrm{Y}-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On a E(Y) = m et V(Y) = σ².



Densité de probabilité



Fonction de répartition

La loi normale intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s'ajoutent, sans que l'un d'eux soit dominant. Elle est aussi importante car, sous certaines conditions, plusieurs autres lois convergent vers elle.