**A l'intention des collègues dont les élèves vont tester le sujet "prospectif" de bac ES.**

Le sujet proposé s'inscrit dans le cadre du texte d'orientation ci-joint. L'exercice I est du type "compréhension des données", l'exercice II du type "réflexion" et l'exercice III du type "contrôle des savoirs de base". Cette classification peut être portée à la connaissance des élèves avant l'épreuve.
Les élèves ont droit à l'utilisation de la calculatrice pour toute la durée de l'épreuve; il a paru en effet difficile d'expérimenter des sujets à la fois "prospectifs" et faisant le partage d'une partie avec calculatrice et d'une partie sans calculatrice.

**L'exercice I** met en jeu des compétences fondamentales, acquises par les élèves tout au long de leur scolarité, sur les variations en pourcentages de quantités; la modélisation en termes de suites géométriques a été mise en place en classe de 1ère. Pour tenir compte du fait que les élèves qui ne suivent pas la spécialité de mathématiques en Terminale ne revoient pas les suites de façon systématique, deux formulations de l'exercice I sont proposées : la 1ère pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité, la 2ème pour les autres. En raison de la difficulté nouvelle apportée par la lecture d'un document annexe, il a paru opportun de limiter les exigences théoriques.

**L'exercice II** exige de l'iniative de la part des élèves, qui doivent eux-mêmes établir les relations entre les questions posées : les fonctions en jeu sont élémentaires pour que les élèves puissent privilégier ce travail de réflexion. Deux versions de l'exercice II sont proposées : le choix de la version à proposer aux élèves est laissé à chaque collègue.

**L'exercice III** est composé de trois parties sans aucun lien entre elles, si ce n'est qu'elles sont des applications directes du cours : calcul de dérivée et interprétation géométrique de la dérivée; lecture graphique de fonctions; statistiques (sous forme de QCM) où la partie propre au programme de Terminale n'intervient qu'à la question f.

Ce sujet se veut prospectif : il ne se place pas dans le cadre actuel de l'épreuve du baccalauréat et pourra donc surprendre les élèves et certains de leurs professeurs. Il est important que chaque collègue "expérimentateur" en soit conscient et en informe ses élèves : afin que ceux-ci jouent pleinement le jeu de l'expérimentation, avec intelligence mais sans crainte de l'échec. Chaque enseignant est bien sûr libre de prendre en compte cette épreuve (en totalité ou en partie) dans son évaluation annuelle. La commission est consciente d'alourdir ainsi la tâche des collègues - déjà considérable en fin d'année -, mais il est difficile d'expérimenter une telle épreuve plus tôt dans l'année scolaire.

L'expérimentation n'atteindra par ailleurs ses objectifs que si chaque collègue fait remonter ses appréciations, critiques et bilan global de façon aussi précise que possible (en s'aidant du questionnaire ci-joint).

**Texte d'orientation : Pour un renouvellement du bac ES.**

Une difficulté majeure est à souligner au préalable : les mathématiques enseignées en série ES sont officiellement dénommées "mathématiques appliquées à l'économie et aux sciences sociales". Doit-on s'orienter résolument vers des sujets de mathématiques à support économique ? Les professeurs de mathématiques se sentent compétents pour juger de développements mathématiques, pas pour juger de la validité de tel ou tel modèle : ils sont donc majoritairement peu prêts pour des sujets trop "économiques" (qui devraient alors être faits conjointement par des enseignants de mathématiques et de SES). De toute façon, il faudrait d'une part éviter les modélisations artificielles, d'autre part limiter à un seul exercice l'intervention décisive du champ économique et social.

Nous proposons une épreuve en 3 parties de valeur comparable :

- **une partie dite "contrôle des savoirs de base" ,**
- **une partie dite "réflexion",**
- **une partie dite "compréhension de données".**

**La partie "contrôle des savoirs de base"** aurait pour but de tester la connaissance des divers objets ou calculs introduits en Terminale. Il pourrait avoir des formes diverses (QCM, vrai/faux où les contre-exemples sont à créer ou à choisir dans une liste fournie, suite de calculs élémentaires - par exemple de dérivées ou intégrales - , etc.). Il pourrait ne pas avoir d'unité globale et faire donc appel à plusieurs domaines du cours de Terminale.
**La partie "réflexion"** reprendrait certaines de compétences évaluées à travers le problème traditionnel : capacité à enchaîner des questions, à construire une argumentation nécessitant des étapes intermédiaires à repérer,…
**La partie "compréhension de données"** devrait permettre de tester la capacité des élèves à lire de façon critique et à comprendre un texte à contenu mathématique (le thème pouvant relever du programme de sciences économiques ou de réalités faciles à comprendre par tout lycéen de Terminale) et à choisir dans le texte les informations pertinentes pour traiter les questions posées. Les données pourraient être fournies sous forme numérique ou graphique, dans un texte au style usuel ou dans un tableau,…
Ces choix nous paraissent compatibles avec la prise en compte de l'enseignement de spécialité ainsi qu'avec la mise en place d'un bac "avec puis sans calculatrice".

## Exercice I . ("compréhension de données") *(spécialité) (6 points)*

Les termes de cet exercice s'appuient sur les données du texte joint en annexe, décrivant le mode de calcul de la cotisation annuelle d'assurance automobile selon la clause du "bonus-malus" (articles 1, 4 et 5 ci-joints). Il convient de commencer par lire **attentivement** ce texte **avant** de répondre aux questions posées.
On considère un assuré titulaire d'un contrat dans lequel la cotisation de référence est de 3000F , et le coefficient de "réduction-majoration" est égal à 1 en l'an 0 (an 0 = an 1997). On veut comparer l'évolution de sa cotisation annuelle dans les deux hypothèses suivantes :

hypothèse A : cet individu ne déclare jamais d'accident;

hypothèse B : cet individu déclare un sinistre en l'an 0 et n'en déclare plus par la suite.

On suppose que la cotisation de référence reste de 3000 F.
On note $u_n$ la cotisation due par cet individu en l'an $n$ dans l'hypothèse A, et $v_n$ celle due en l'an $n$ dans l'hypothèse B.

1) Etude de la suite $(u_n)$.

a) Calculer $u_1$, $u_2$ (donner la valeur exacte sans tenir compte de la règle des arrondis, exprimée en italique dans le texte de l'annexe).

b) Quelle semble être la nature de la suite $(u_n)$ ? Justifier.c) Justifier que la cotisation $u_n$ ne peut descendre en-dessous de 1500 F .

d) A partir de quelle année $n_0$ la cotisation $u_n$ sera-t-elle égale à 1500 F ? (On ne tiendra pas compte dans cette question de la règle des arrondis, exprimée en italique dans le texte de l'annexe.)

2) Etude de la suite $(v_n)$.

a) Justifier que la cotisation $v_3$ est égale à 3000 F.

b) En déduire que, pour $n \geq 3$, on a : $v_n = u_{n-3}$.

c) A partir de quelle année $n_1$ les deux cotisations seront-elles à nouveau égales ?

3) La déclaration de sinistre dans l'hypothèse B entraîne un surcoût pour l'assuré.

a) Exprimer ce surcoût pour l'année $n$ à l'aide de $u_n$ et $v_n$ .

b) Vérifier que, pour $n$ entier de l'intervalle $[3; n_0]$, ce surcoût vaut : $3000 \times 0{,}95^{n-3} \times (1 - 0{,}95^3)$.

4) Compléter le tableau suivant (en tenant compte de la règle des arrondis exprimée dans les articles 4 et 5 du document annexe).

| Année $n$ | Coeff. en l'an $n$ (hypothèse A) | $u_n$ | Coeff. en l'an $n$ (hypothèse B) | $v_n$ | $v_n - u_n$ | surcoût cumulé (jusqu'à l'an $n$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3000 | 1 | 3000 | 0 | 0 |
| | | | | | | |
| 2 | 0,90 | | 1,18 | | | 1740 |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

**Annexe : Clause de réduction-majoration des cotisations en assurance automobile**
(annexe à l'article A 121-1 du code des assurances).

**Article 1.** Lors de chaque échéance annuelle du contrat, la cotisation due par l'assuré est déterminée en multipliant le montant de la cotisation de référence … par un coefficient dit "coefficient de réduction-majoration", fixé conformément aux articles 4 et 5 suivants.
Le coefficient d'origine est 1.

**Article 4.** Après chaque période annuelle d'assurance sans sinistre, le coefficient applicable est celui utilisé à la précédente échéance réduit de 5 p. 100*, arrêté à la deuxième décimale et arrondi par défaut…*
Le coefficient de réduction-majoration ne peut être inférieur à 0,50.

**Article 5.** Un sinistre survenu au cours de la période annuelle d'assurance majore le coefficient de 25 p. 100; un second sinistre majore le coefficient obtenu de 25 p. 100 et il en est de même pour chaque sinistre supplémentaire.. *Le coefficient obtenu est arrêté à la deuxième décimale et arrondi par défaut…*
En aucun cas le coefficient de réduction-majoration ne peut être supérieur à 3,50.
Après deux années consécutives sans sinistre, le coefficient applicable ne peut être supérieur à 1.

## Exercice I . ("compréhension de données") *(non spécialité) (6 points)*

Les termes de cet exercice s'appuient sur les données du texte joint en annexe, décrivant le mode de calcul de la cotisation annuelle d'assurance automobile selon la clause du "bonus-malus" (articles 1, 4 et 5 ci-joints). Il convient de commencer par lire **attentivement** ce texte **avant** de répondre aux questions posées.

On considère un assuré titulaire d'un contrat dans lequel la cotisation de référence est de 3000F , et le coefficient de "réduction-majoration" est égal à 1 en l'an 0 (an 0 = an 1997). On veut comparer l'évolution de sa cotisation annuelle dans les deux hypothèses suivantes :

hypothèse A : cet individu ne déclare jamais d'accident;

hypothèse B : cet individu déclare un sinistre en l'an 0 et n'en déclare plus par la suite.

On suppose que la cotisation de référence reste de 3000 F.

On note $u_n$ la cotisation due par cet individu en l'an $n$ dans l'hypothèse A, et $v_n$ celle due en l'an $n$ dans l'hypothèse B.

**1)** Les cotisations dans l'hypothèse A.

a) Calculer $u_1$, $u_2$ (donner la valeur exacte sans tenir compte de la règle des arrondis, exprimée en italique dans le texte de l'annexe).

b) Quelle semble être la nature de la suite $(u_n)$ ? Justifier.c) Justifier que la cotisation $u_n$ ne peut descendre en-dessous de 1500 F .

**2)** Les cotisations dans l'hypothèse B.

a) Justifier que la cotisation $v_3$ est égale à 3000 F.

b) En déduire que, pour $n \geq 3$, on a : $v_n = u_{n-3}$.

**3)** Compléter le tableau suivant (en tenant compte de la règle des arrondis exprimée dans les articles 4 et 5 du document annexe). La déclaration de sinistre dans l'hypothèse B entraîne un surcoût pour l'assuré que l'on demande aussi de calculer année par année puis de cumuler.

| Année $n$ | Coeff. en l'an $n$(hypothèse A) | $u_n$ | Coeff. en l'an $n$(hypothèse B) | $v_n$ | Surcoût annuel$v_n$ - $u_n$ | surcoût cumulé(jusqu'à l'an $n$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3000 | 1 | 3000 | 0 | 0 |
| | | | | | | |
| 2 | 0,90 | | 1,18 | | | 1740 |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

**Annexe : Clause de réduction-majoration des cotisations en assurance automobile**

(annexe à l'article A 121-1 du code des assurances).

**Article 1.** Lors de chaque échéance annuelle du contrat, la cotisation due par l'assuré est déterminée en multipliant le montant de la cotisation de référence … par un coefficient dit "coefficient de réduction-majoration", fixé conformément aux articles 4 et 5 suivants.

Le coefficient d'origine est 1.

**Article 4.** Après chaque période annuelle d'assurance sans sinistre, le coefficient applicable est celui utilisé à la précédente échéance réduit de 5 p. 100*, arrêté à la deuxième décimale et arrondi par défaut…*

Le coefficient de réduction-majoration ne peut être inférieur à 0,50.

**Article 5.** Un sinistre survenu au cours de la période annuelle d'assurance majore le coefficient de 25 p. 100; un second sinistre majore le coefficient obtenu de 25 p. 100 et il en est de même pour chaque sinistre supplémentaire.. *Le coefficient obtenu est arrêté à la deuxième décimale et arrondi par défaut…*

En aucun cas le coefficient de réduction-majoration ne peut être supérieur à 3,50.

Après deux années consécutives sans sinistre, le coefficient applicable ne peut être supérieur à 1.

**Exercice II ("réflexion") (*7 points*)**

On considère la fonction $f$ définie pour tout x élément de $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ .

1) On donne ci-contre le tableau de variations de la fonction $f$.
Justifier tous les renseignements fournis par ce tableau.

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{2e}$ | $\searrow$ | $0$ |

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

a) Tracer les courbes $\Gamma$, $C_1$ et $C_2$ représentant respectivement les fonctions $g$, $p$ et $q$ définies sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x$, $p(x) = 0{,}1\,x^2$ et $q(x) = 0{,}2\,x^2$.
b) Déterminer le nombre de points communs à $\Gamma$ et $C_1$. Justifier.
c) Déterminer le nombre de points communs à $\Gamma$ et $C_2$. Justifier.

3) On considère la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2e}x^2$ .

a) Montrer qu'elle a un point commun et un seul avec $\Gamma$.
b) Soit $F$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$.
Montrer que $F$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction ln .
c) On considère l'ensemble $D$ des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x,y)$ vérifient

$1 \leq x \leq \sqrt{e}$ et $\ln x \leq y \leq \dfrac{x^2}{2\,e}$ . *(On ne demande pas de représenter D.)*

Calculer l'aire de $D$ (en unités d'aire)

4) Donner un exemple d'une fonction $h$ de la forme $x \mapsto a\,x^2$, où $a$ désigne un nombre réel différent de $\dfrac{1}{2e}$ , dont la courbe représentative coupe la courbe $\Gamma$ en un point et un seul.

**Exercice III. ("savoirs de base") (*7 points*)**

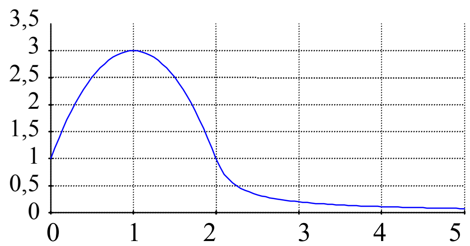
**1.** Soit la fonction $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

a) Calculer la dérivée de $f$.
b) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ en son point d'abscisse ln 2.
c) Existe-t-il un point de la courbe de $f$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ?

**2.** Soit $f$ une fonction définie sur $[0; +\infty[$ représentée graphiquement ci-dessous. (On admet que les points de coordonnées (0;1), (1;3) et (2;1) appartiennent à la courbe de $f$ et que $f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.)

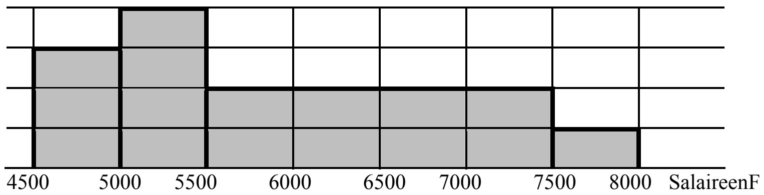
a) Déduire du graphique les variations de la fonction $\ln f$ (c'est à dire $\ln \circ f$).

b) Préciser le signe de $\ln f(x)$ selon les valeurs de $x$ et la limites de $\ln f$ en $+\infty$.



**3. Pour chacune des question suivantes, cocher la ou les bonne(s) réponse(s).**
***Aucune justification n'est demandée.***

**a.** Voici l'histogramme de la répartition des salaires dans une entreprise :




Dans quelle tranche de salaire de l'histogramme, se trouve l'effectif le plus important ?

- entre 4 500 F et 5 000 F .................................................. ☐
- entre 5 000 F et 5 500 F .................................................. ☐
- entre 5 500 F et 7 500 F .................................................. ☐
- entre 7 500 F et 8 000 F .................................................. ☐

**b.** Le salaire médian est :

- Le salaire le plus fréquent de l'entreprise .................................................. ☐
- Le salaire perçu en moyenne par les salariés .................................................. ☐
- Le salaire qu'un individu, pris au hasard, a une chance sur deux de dépasser .................. ☐

**c.** On donne la répartition suivante des salaires horaires d'une entreprise :

| Salaire horaire (en F) | 30 | 40 | 70 |
|---|---|---|---|
| Nombre de salariés | 10 | 20 | 20 |

Le salaire moyen horaire est égal à :

- 33,33 F .................................................. ☐
- 40,00 F .................................................. ☐
- 46,66 F .................................................. ☐
- 50,00 F .................................................. ☐

**d.** Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

Si, dans une entreprise, tous les salaires mensuels sont majorés de 100 F:

- Le salaire médian ne change pas.................................................. ☐
- Le salaire médian augmente de 100 F .................................................. ☐
- Le salaire médian est modifié, mais il faut faire un calcul pour savoir de quel montant ... ☐
- Le salaire moyen ne change pas.................................................. ☐
- Le salaire moyen augmente de 100 F .................................................. ☐
- Le salaire moyen augmente de moins de 100 F .................................................. ☐

**e.** L'écart-type d'une distribution de salaire horaire est de 17 F. Cela signifie que :

- Le salaire le plus élevé vaut 17 F de plus que le salaire le plus faible .................... ☐
- Le salaire de chaque salarié est distant de 17 F en moyenne du salaire moyen .......... ☐
- Le salaire moyen vaut 17 F de plus que le salaire médian .................................................. ☐

**f.** Deux des affirmations suivantes sont vraies . Lesquelles ?

Un coefficient de corrélation :

- mesure la dépendance entre deux variables.................................................. ☐
- mesure la probabilité de réalisation d'une prévision.................................................. ☐
- mesure toujours l'intensité d'une relation de causalité.................................................. ☐
- est toujours positif.................................................. ☐
- est toujours compris entre -1 et 1.................................................. ☐

**g.** Une grandeur G évolue dans le temps, comme indiqué ci-dessous :

| Année | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 |
|---|---|---|---|---|
| G | 142 | 180 | 250 | 320 |

Le taux de croissance moyen annuel de G est

- 31,11 % .................................................. ☐
- 31,23 % .................................................. ☐
- 41,78 % .................................................. ☐
- 75,12 % .................................................. ☐