Expérimentation Bac 2000
mai 1998

Mathématiques

Terminale S

SUJET 1

Pour tous

Le soin et la précision apportés à la rédaction, à la présentation des résultats et à la validation des affirmations seront pris en compte dans la notation.

Connaissance de base (3 points)

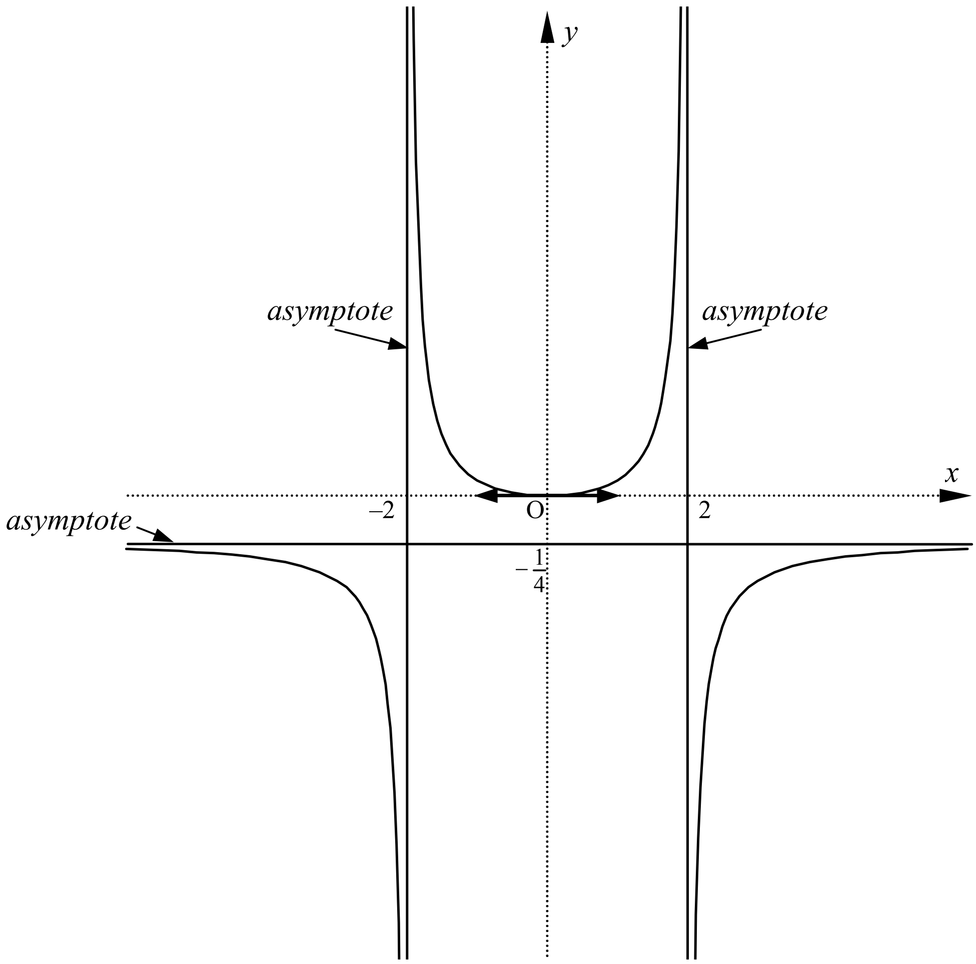
Démontrer que la composée de deux symétries centrales de centres respectifs O_1 et O_2 est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Problèmes (17 points)

Les problèmes suivants sont indépendants.

Problème n°1 (3 points)

Proposer, et la définir explicitement par une relation algébrique, une fonction réelle f dont la courbe représentative ait l'allure suivante avec 2 asymptotes verticales, une asymptote horizontale et une tangente horizontale en O. Expliquez les raisons de vos choix.



Problème n°2 (4 points)

Un certain jeu de hasard, qui fut présenté à la télévision, se joue avec un jeu ordinaire de 32 cartes qui combine donc les "hauteurs" (as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7) et les "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) comme l'indique le tableau suivant où chacun des 32 rectangles représente une carte de ce jeu :

	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
Pique					×			
Cœur	×							
Carreau			×					
Trèfle					×			

Dans un premier temps, le joueur parie 4 cartes à raison d'une seule par couleur. Un tirage au sort parmi les 32 cartes désigne ensuite une carte par "couleur", de façon équiprobable pour chacune des "hauteurs". Les tirages de "hauteur" et "couleur" sont indépendants.

Par exemple, un joueur a parié sur les 4 cartes marquées d'une croix × dans le tableau : 10 de pique, as de cœur, dame de carreau et 10 de trèfle. Le sort a désigné ensuite : dame de pique, 7 de cœur, dame de carreau et roi de trèfle. Ainsi, le joueur, qui avait fait le pari, a une seule bonne carte parmi les 4 sorties.

Tout joueur empoche au tirage un certain nombre de fois sa mise dans les seuls cas suivants :
- s'il a bien choisi les 4 cartes sorties, il empoche 1000 fois sa mise ;
- s'il a choisi seulement 3 des 4 cartes sorties, il empoche 30 fois sa mise ;
- s'il a choisi seulement 2 des 4 cartes sorties, il empoche 2 fois sa mise.

1° Quelle est la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de cartes bien choisies par le joueur parmi les 4 cartes sorties ?
Donner une valeur approchée de chacune des probabilités.

2° Le joueur qui parie 10 francs lors d'un tirage a une certaine espérance de gain (qui peut être négative). La calculer.

Problème n°3 (3 points)

Deux nombres entiers positifs ou nuls n et p, p supposé connu, sont tels que n et n + p soient des carrés d'entiers, eux-mêmes positifs ou nuls.

1° Donner toutes les valeurs de n dans les cas suivants : p = 13, p = 14, p= 20, p = 40, p = 48, p = 105.

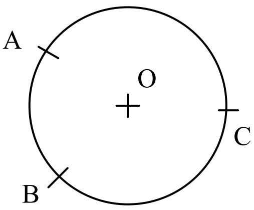
2° Donner des conditions <u>suffisantes</u> que p doit satisfaire pour qu'il n'existe qu'une seule solution pour n. Justifier.

3° Quelle condition p doit-il satisfaire pour qu'il n'existe-t-il pas de solution pour n ? Pourquoi ?

…Tournez la page S. V. P.☞

Problème n°4 (4 points)

Un cerceau de bois est homogène dans la répartition de sa masse. A trois endroits sont marquées des encoches, représentées par les points A, B et C sur la figure ci-contre (le triangle ABC n'a pas nécessairement une forme particulière). A ces encoches, on doit poser des petites masses de telle façon que le cerceau puisse tourner dans un plan horizontal autour de son centre O, tout en restant en parfait équilibre.



Donner des valeurs de masses qui conviennent.

Aide : A partir de l'égalité vectorielle qui traduit la propriété attendue, on pourra chercher à obtenir trois nouvelles égalités, numériques cette fois, en multipliant scalairement et successivement par $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ les deux membres de cette égalité.

Problème n°5 (3 points)

Une application f de ℝ dans ℝ vérifie la condition suivante pour tout couple (x, x') tel que $x \neq x'$:

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right| \leq K \quad \text{où} \quad K \geq 0$$

Considérons le point M $(x,\ f(x))$ appartenant à la courbe représentative de f.

1° Déterminer la région du plan à laquelle appartiennent les points M'$(x',\ f(x'))$, vérifiant l'inégalité ci-dessus.

2° On considère l'application f vérifiant l'inégalité ci-dessus et telle que : $f(1) = 2$ et, pour tout x réel, $|f\,'(x)| < 3$. Dessiner avec soin la région du plan dans laquelle se trouve la courbe représentative de f et justifier votre dessin.

3° On considère l'application réelle $x \mapsto f(x) = e^x$ définie sur $[0\ ;\ 1]$. Vérifie-t-elle sur cet intervalle la condition $\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right| \leq K$ où $K \geq 0$? Justifier votre affirmation. Donner un exemple personnel d'application vérifiant cette condition.

COMMENTAIRES A PRIORI DU SUJET 1

L'ensemble de l'épreuve est équilibré de telle façon que tout élève qui a produit un travail régulier pendant les deux dernières années de son 2ème cycle puisse obtenir une note au moins égale à 10. Contrairement aux épreuves classiquement présentées au baccalauréat, celle-ci nécessite pour l'excellence des résultats une couverture large des notions enseignées en première et terminale (ne se réduisant pas à la seule analyse) et des capacités développées au lycée. Cette étendue est fondamentale dans notre proposition de texte : elle permet de mettre en évidence, comme nous le verrons, des qualités prédictives de bonne intégration dans des cycles supérieurs. En contrepartie, un résultat moyen peut être atteint par une bonne connaissance de son cours et une compréhension convenable des exercices traditionnels, en dépit de quelques "trous" dans la couverture des programmes .

On remarquera le petit texte préalable qui donne brièvement mais explicitement une des règles du contrat selon lequel évaluera le correcteur. Le soin, la précision et la rigueur sont certes des qualités différemment appréciées, mais de toute façon sont prises en compte par la majorité des correcteurs. De plus, elles sont partie intégrante de ces qualités que l'enseignement des mathématiques doit développer. Le rappeler en en-tête ne peut que renforcer la connaissance des critères d'exigence et expliquer, d'emblée, l'origine de certaines distorsions dans la notation.

La question sur des connaissances de base

La démonstration attendue n'est que la restitution d'une proposition traditionnellement établie dans toutes les classes et ne présentant pas de variantes très différentes. ce qui en facilite et homogénéise la correction. De plus, la conclusion n'est pas triviale et ainsi donne un sens à la recherche d'une preuve mathématique. L'accompagnement de la démonstration par une figure semble aller de soi puisqu'il est nécessaire de désigner les points en jeu.

Problème 1

<u>Concepts mobilisés</u> : asymptote, tangente à une courbe, points remarquables dans une relation fonctionnelle $x \mapsto f(x)$.

<u>Capacités nécessaires</u> : changer de registre ; savoir identifier des propriétés relationnelles à partir d'une figure.

L'intérêt essentiel d'un tel exercice est de mesurer la capacité à passer du registre graphique au registre algébrique formel. C'est à partir de l'association des propriétés lues sur la figure selon un code classique que l'élève doit reconstruire pas à pas une formule explicite liant x à f(x). Une méthode essais-erreurs est possible mais la solution à trouver n'est pas unique. Cet exercice offre une certaine ouverture que l'élève doit pouvoir maîtriser.

Finalement, on constatera que le nombre et la variété des démarches et des concepts sont très importants et que certains exercices laissent une part d'initiative aux élèves. Tout ceci confère à l'ensemble de l'épreuve une certaine complexité, alors que chacun des exercices semble traitable dès le niveau de la première. La très bonne réussite d'un élève serait significative d'un bagage homogène à des niveaux taxonomiques supérieurs sans faire appel à une grande technicité, significative également d'une capacité à passer d'un cadre à un autre (géométrique, algébrique, aléatoire, arithmétique) et d'un registre à un autre (métalangage, langage formel, graphique).

Problème 2

Concepts mobilisés : dénombrement sur un ensemble de cardinal petit (vérification "à la main" accessible), variable aléatoire discrète, espérance mathématique.

Capacités nécessaires : reconnaître une situation mathématique dans une situation du réel ; probabiliser une situation équirépartie ; mener un calcul simple avec une calculette.

Le problème est classique mais nécessite une petite modélisation comme en présentent souvent les problèmes de probabilité. La variable aléatoire admet une loi qui se dégage aisément du calcul combinatoire sur un ensemble équiréparti.

Problème 3

Concepts mobilisés : identité remarquable (!), nombre premier, divisibilité, décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

Capacités nécessaires : savoir "bricoler" sur les entiers naturels ; raisonner de façon exhaustive sur des propriétés arithmétiques.

Liberté est laissée à l'élève de traduire la question à l'aide de paramètres judicieux non fournis dans le texte. Les concepts arithmétiques sont élémentaires mais les démarches à déployer présentent un grand intérêt : approche heuristique d'une solution, travail par exhaustion. L'arithmétique se prête bien à ces types de démarches qui valorisent à la fois le tâtonnement et la systématisation peu activés dans un problème d'analyse.

Problème 4

Concepts mobilisés : définition vectorielle du barycentre, produit scalaire, relation $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \left\| \overrightarrow{\mathrm{OA}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\| cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$*, cercle et angle au centre, système d'équations linéaires.*

Capacités nécessaires : traduire une propriété physique de centre de gravité par une formule vectorielle barycentrique, traduire une relation vectorielle en une relation algébrique, résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Peu de concepts en jeu dans cet exercice qui évaluera surtout les capacités à modéliser une situation familière de l'environnement et à effectuer avec soin un calcul algorithmique. L'aide proposée est laissée au libre choix de l'enseignant. Elle nécessite une initiative de la part de l'élève qui ne leur est peut-être pas familière.

Problème 5

Concepts mobilisés : valeur absolue, coefficient directeur, traduction graphique d'inéquations, dérivée de la fonction exponentielle, théorème des accroissements finis.

Capacités nécessaires : traduire une relation algébrique en une figure dans le plan repéré ; effectuer une représentation soignée et relativement précise; justifier une propriété d'analyse ; construire un exemple personnel.

La simplicité des concepts en jeu ne doit pas laisser croire que cet exercice ne mesure qu'une faible part des connaissances et capacités requises en terminale scientifique. En effet, dans les deux premières questions, il s'agit d'effectuer correctement et avec soin la traduction graphique d'une propriété analytique d'une fonction quelconque, c'est-à-dire non explicitement donnée. La prise en compte de la valeur absolue nécessitera une référence à la symétrie centrale, remarque non triviale. La dernière question mobilise des connaissances spécifiques de la terminale et, surtout, exige de l'esprit critique et de l'imagination de la part de l'élève.

Expérimentation Bac 2000
mai 1998

Mathématiques

Terminale S

SUJET 2

Elèves ayant suivi l'enseignement de spécialité Math.

Le soin, la rigueur et la précision apportés à la rédaction, à la présentation des résultats et à la validation des affirmations seront pris en compte dans la notation.

Connaissance de base (3 points)

Démontrer que, s'il existe, le barycentre G de trois points (A, a), (B, b) et (C, c) est le barycentre de (A, a) et de (I, $b+c$), où I désigne, s'il existe, le barycentre des deux autres points (B, b) et (C, c).

Problèmes (17 points)

Les problèmes suivants sont indépendants.

Problème n°1 (4 points)

Considérons la suite de terme général $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. On cherche à prouver qu'elle est divergente.

1° Démontrer que, pour tout n : $S_{2n} \geq \frac{1}{2} + S_n$.

2° Démontrer par récurrence sur k que, pour tout k, il existe n tel que : $S_n > k$.
Qu'en déduisez-vous ?

3° Que pensez-vous de la suite partielle : $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$? Justifiez votre opinion.

Problème n°2 (3 points)

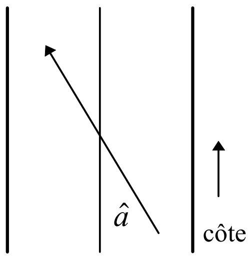
On veut remarquer une propriété de l'écriture décimale de certaines fractions rationnelles.

1° En utilisant votre calculatrice, donnez le résultat qu'elle affiche pour la division de 481 par 999. Que remarquez-vous ?

2° Inversement, déterminer la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, telle que son développement décimal se présente sous la forme périodique : 0,792 792 792 ...

3° Le développement ayant dans la question 2 pour période 3, donnez un exemple où la période serait 2, puis un autre où la période serait 4. A partir des remarques précédentes, formulez, sans la démontrer, une propriété générale.

Problème n°3 (3 points)



Je monte à bicyclette une côte à 8% (élévation de 8 m pour 100 m sur le plat) sur une route bien droite. Sous quel angle $\hat{a}$ par rapport à l'axe de la route dois-je choisir ma trajectoire afin de ne plus monter cette côte qu'à 5% ?

Problème n°4 (4 points)

On veut déterminer tous les points d'une ellipse en ne possédant que les informations suivantes :

- les points A et A' à distance maximale sur l'ellipse sont donnés,
- un 3$^{\text{ème}}$ point M de l'ellipse n'appartenant pas à la médiatrice de [A, A'] est également donné.

Elaborez et justifiez un algorithme géométrique permettant de retrouver tous les autres points de l'ellipse. Construisez avec soin, en particulier trois d'entre eux, n'admettant pas de relation symétrique mutuelle.

Problème n°5 (3 points)

Deux petites salles de cinéma A et B de même capacité n spectateurs, se vident en même temps à la fin du film qui y était projeté. L'ensemble des spectateurs passent un à un, de façon indépendante, par la même porte de sortie. On suppose que la probabilité qu'un spectateur qui franchit la porte sorte de la salle A ou sorte de la salle B est la même (donc égale à 1/2).

Quelle est en fonction de n et de k la probabilité pour que le dernier spectateur de l'une quelconque des deux salles sorte alors qu'il reste encore $(n - k)$ spectateurs dans l'autre salle ?

Donner une estimation de cette probabilité pour $n = 100$, $k = 10$, sachant que $2^{10} \approx 10^3$.

COMMENTAIRES A PRIORI DU SUJET 2

Les commentaires du préambule du sujet 1 sont, bien entendu, valables.

La question sur des connaissances de base

La démonstration attendue exige encore la restitution d'une proposition du cours. Elle est classique et a fait l'objet en classe de nombreuses applications. Bien que non demandée, une figure spontanément donnée signifierait la compréhension plus profonde de la propriété du barycentre.

Problème 1

Concepts mobilisés : suite numérique à termes positifs, ordre sur les réels

Capacités nécessaires : savoir majorer ou minorer terme à terme ou par le choix approprié d'un terme ; savoir conduire un raisonnement par récurrence ; savoir réinvestir un processus

L'objectif est volontairement déclaré d'emblée afin que les élèves disposent d'une clé explicative des questions intermédiaires. Ces questions, relativement indépendantes, sont conformes au sens-même d'une fonction essentielle de l'enseignement de l'analyse qui est d'apprendre à majorer et minorer. La difficulté présente du raisonnement par récurrence tiendra au conflit entre le raisonnement sur n ou sur k.

Problème 2

Concepts mobilisés : développement décimal illimité ; fraction rationnelle : fraction irréductible

Capacités nécessaires : raisonner inductivement ; trouver un exemple personnel ; généraliser

La question initiale doit faire apparaître une propriété liée à la division par 999 qui servira dans la question 2. Cette remarque est un guide réinvestissable immédiatement dans la construction des deux exemples demandés. Ce type de question ouverte risque de désarçonner les élèves non habitués à rechercher eux-mêmes des exemples respectant des contraintes et satisfaisant des propriétés.

Problème 3

<u>Concepts mobilisés</u> : pente d'une droite de l'espace ; projection orthogonale dans l'espace ; relations trigonométriques simples

<u>Capacités nécessaires</u> : mathématiser une situation du monde réel ; représenter sur la feuille une situation géométrique de l'espace ; en maîtriser la perception

Il s'agit pour l'élève de décoder la figure donnée puis de reconnaître et d'identifier le problème comme un vrai problème de géométrie. La difficulté résidera ensuite dans la maîtrise des relations géométriques définies par la situation, sans nécessiter des prouesses techniques dans le calcul trigonométrique.

Problème 4

<u>Concepts mobilisés</u> : ellipse ; relation entre un point du cercle principal et un point de l'ellipse

<u>Capacités nécessaires</u> : traduire en algorithme une suite d'opérations graphiques ; le rendre opérationnel un certain nombre de fois

La connaissance du cours sur une propriété de l'ellipse est indispensable ici. Mais l'usage de cette propriété est inverse de celui généralement utilisé. C'est donc la réversibilité d'une relation qui doit être mobilisée. Par la suite, l'algorithme doit être suffisamment explicite pour être fonctionnel. Le soin apporté à la construction est pris en compte.

Problème 5

<u>Concepts mobilisés</u> : probabilité ; événements indépendants ; variables aléatoires ; loi binomiale

<u>Capacités nécessaires</u> : mathématiser une situation ; développer une preuve en probabilité élémentaire ; effectuer une approximation "à la main"

La première difficulté réside encore dans la reconnaissance d'un problème mathématique dans une situation réelle, puis dans l'identification d'un modèle probabiliste sous-jacent (définir des événements ou des variables aléatoires associés à la situation). Une autre difficulté se présente lorsque l'on doit notifier l'indépendance de deux événements ou de deux variables aléatoires. La dernière difficulté est d'ordre numérique : il faut savoir donner un ordre de grandeur à des produits de nombres.

Expérimentation Bac 2000
mai 1998

Mathématiques

Terminale S

SUJET 3

Pour tous

Le soin, la rigueur et la précision apportés à la rédaction, à la présentation des résultats et à la validation des affirmations seront pris en compte dans la notation.

Connaissance de base (3 points)

Démontrer que, s'il existe, le barycentre G de trois points (A, a), (B, b) et (C, c) est le barycentre de (A, a) et de (I, $b+c$), où I désigne, s'il existe, le barycentre des deux autres points (B, b) et (C, c).

Problèmes (17 points)

Les problèmes suivants sont indépendants.

Problème n°1 (4 points)

Considérons la suite de terme général $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. On cherche à prouver qu'elle est divergente.

1° Démontrer que, pour tout n : $S_{2n} \geq \frac{1}{2} + S_n$.

2° Démontrer par récurrence sur k que, pour tout k, il existe n tel que : $S_n > k$.
Qu'en déduisez-vous ?

3° Que pensez-vous de la suite partielle : $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$? Justifiez votre opinion.

Problème n°2 (3 points)

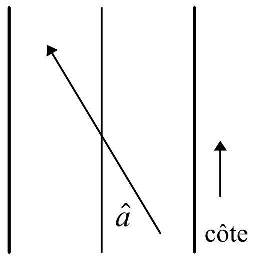
On veut remarquer une propriété de l'écriture décimale de certaines fractions rationnelles.

1° En utilisant votre calculatrice, donnez le résultat qu'elle affiche pour la division de 481 par 999. Que remarquez-vous ?

2° Inversement, déterminer la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, telle que son développement décimal se présente sous la forme périodique : 0,792 792 792 ...

3° Le développement ayant dans la question 2 pour période 3, donnez un exemple où la période serait 2, puis un autre où la période serait 4. A partir des remarques précédentes, formulez, sans la démontrer, une propriété générale.

Problème n°3 (3 points)



Je monte à bicyclette une côte à 8% (élévation de 8 m pour 100 m sur le plat) sur une route bien droite. Sous quel angle $\hat{a}$ par rapport à l'axe de la route dois-je choisir ma trajectoire afin de ne plus monter cette côte qu'à 5% ?

Problème n°4 (4 points)

Deux points A et A' ont pour abscisses respectives 1 et -1 sur un axe $(O,\vec{i}\,)$. Un point M d'abscisse x, différente de 1, sur cet axe a pour image un point M' d'abscisse x' et défini par la relation :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = -4$$

1° Déterminer et représenter sur l'axe $(O,\vec{i}\,)$ le ou les intervalles auxquels doit appartenir M pour que la longueur MM' ne dépasse pas 4.

2° Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x'$, ainsi que le ou les intervalles décrits par x', sur l'axe des ordonnées, lorsque MM' ne dépasse pas 4.

Problème n°5 (3 points)

Deux petites salles de cinéma A et B de même capacité n spectateurs, se vident en même temps à la fin du film qui y était projeté. L'ensemble des spectateurs passent un à un, de façon indépendante, par la même porte de sortie. On suppose que la probabilité qu'un spectateur qui franchit la porte sorte de la salle A ou sorte de la salle B est la même (donc égale à 1/2).

Quelle est en fonction de n et de k la probabilité pour que le dernier spectateur de l'une quelconque des deux salles sorte alors qu'il reste encore $(n - k)$ spectateurs dans l'autre salle ?

Donner une estimation de cette probabilité pour $n = 100$, $k = 10$, sachant que $2^{10} \approx 10^3$.

COMMENTAIRES A PRIORI DU SUJET 3

Les commentaires du préambule du sujet 1 sont, bien entendu, valables.

La question sur des connaissances de base

La démonstration attendue exige encore la restitution d'une proposition du cours. Elle est classique et a fait l'objet en classe de nombreuses applications. Bien que non demandée, une figure spontanément donnée signifierait la compréhension plus profonde de la propriété du barycentre.

Problème 1

<u>Concepts mobilisés</u> : suite numérique à termes positifs, ordre sur les réels

<u>Capacités nécessaires</u> : savoir majorer ou minorer terme à terme ou par le choix approprié d'un terme ; savoir conduire un raisonnement par récurrence ; savoir réinvestir un processus

L'objectif est volontairement déclaré d'emblée afin que les élèves disposent d'une clé explicative des questions intermédiaires. Ces questions, relativement indépendantes, sont conformes au sens-même d'une fonction essentielle de l'enseignement de l'analyse qui est d'apprendre à majorer et minorer. La difficulté présente du raisonnement par récurrence tiendra au conflit entre le raisonnement sur n ou sur k.

Problème 2

<u>Concepts mobilisés</u> : développement décimal illimité ; fraction rationnelle : fraction irréductible

<u>Capacités nécessaires</u> : raisonner inductivement ; trouver un exemple personnel ; généraliser

La question initiale doit faire apparaître une propriété liée à la division par 999 qui servira dans la question 2. Cette remarque est un guide réinvestissable immédiatement dans la construction des deux exemples demandés. Ce type de question ouverte risque de désarçonner les élèves non habitués à rechercher eux-mêmes des exemples respectant des contraintes et satisfaisant des propriétés.

Problème 3

Concepts mobilisés : pente d'une droite de l'espace ; projection orthogonale dans l'espace ; relations trigonométriques simples

Capacités nécessaires : mathématiser une situation du monde réel ; représenter sur la feuille une situation géométrique de l'espace ; en maîtriser la perception

Il s'agit pour l'élève de décoder la figure donnée puis de reconnaître et d'identifier le problème comme un vrai problème de géométrie. La difficulté résidera ensuite dans la maîtrise des relations géométriques définies par la situation, sans nécessiter des prouesses techniques dans le calcul trigonométrique.

Problème 4

Concepts mobilisés : traduction de relations fonctionnelles à une et deux dimensions, valeur absolue, séparation des cas.

Capacités nécessaires : traduire une relation vectorielle en une relation algébrique ; passer de la représentation à une dimension à une représentation à deux dimensions ; savoir distinguer les cas alternatifs.

Peu de concepts en jeu également dans cet exercice qui évaluera surtout les capacités à traduire sur un axe et dans le plan des relations une fois celles-ci établies. L'élève devra prendre conscience de la simplification obtenue grâce au graphique plan à condition d'y avoir effectué une représentation soignée.

Problème 5

Concepts mobilisés : probabilité ; événements indépendants ; variables aléatoires ; loi binomiale

Capacités nécessaires : mathématiser une situation ; développer une preuve en probabilité élémentaire ; effectuer une approximation "à la main"

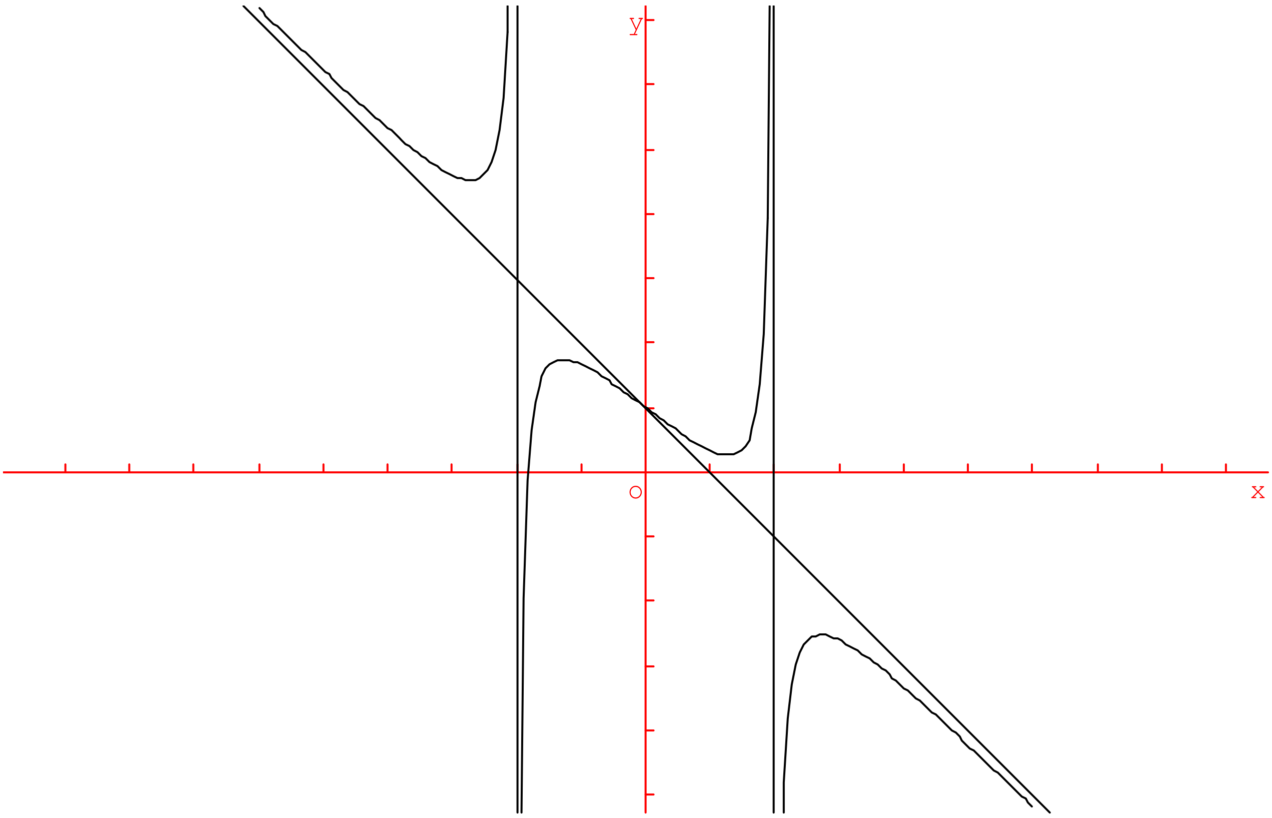
La première difficulté réside encore dans la reconnaissance d'un problème mathématique dans une situation réelle, puis dans l'identification d'un modèle probabiliste sous-jacent (définir des événements ou des variables aléatoires associés à la situation). Une autre difficulté se présente lorsque l'on doit notifier l'indépendance de deux événements ou de deux variables aléatoires. La dernière difficulté est d'ordre numérique : il faut savoir donner un ordre de grandeur à des produits de nombres.

SUJET n°4

EXERCICE 1

a) Qu'appelle-t-on primitive d'une fonction sur un intervalle ? La primitive d'une fonction donnée est-elle unique ? Quelle est la primitive de $\frac{1}{x^2}$, de $\frac{1}{x}$? Quel est le lien entre primitive et intégrale ?

b) Le graphe ci-dessous est celui d'une primitive F d'une fonction f. Esquissez le graphe de f.



EXERCICE 2

Soit (A,B,C) un triangle et (a,b,c) trois réels tels que $a + b + c \neq -1$. Soit f l'application qui à tout point M associe le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c) et $(M,1)$. Quelle est la nature de f ?

PROBLEME

On souhaite obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$. Les deux premières parties sont indépendantes.

I) Pour x différent de -1, on pose $f(x) = \frac{2+x}{1+x}$.

On considère la suite définie par $x_1 = 1$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Résoudre $f(x) = x$. On note r la solution positive et on définit la suite auxiliaire v_n définie par $v_n = \frac{x_n - r}{x_n + r}$.

b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

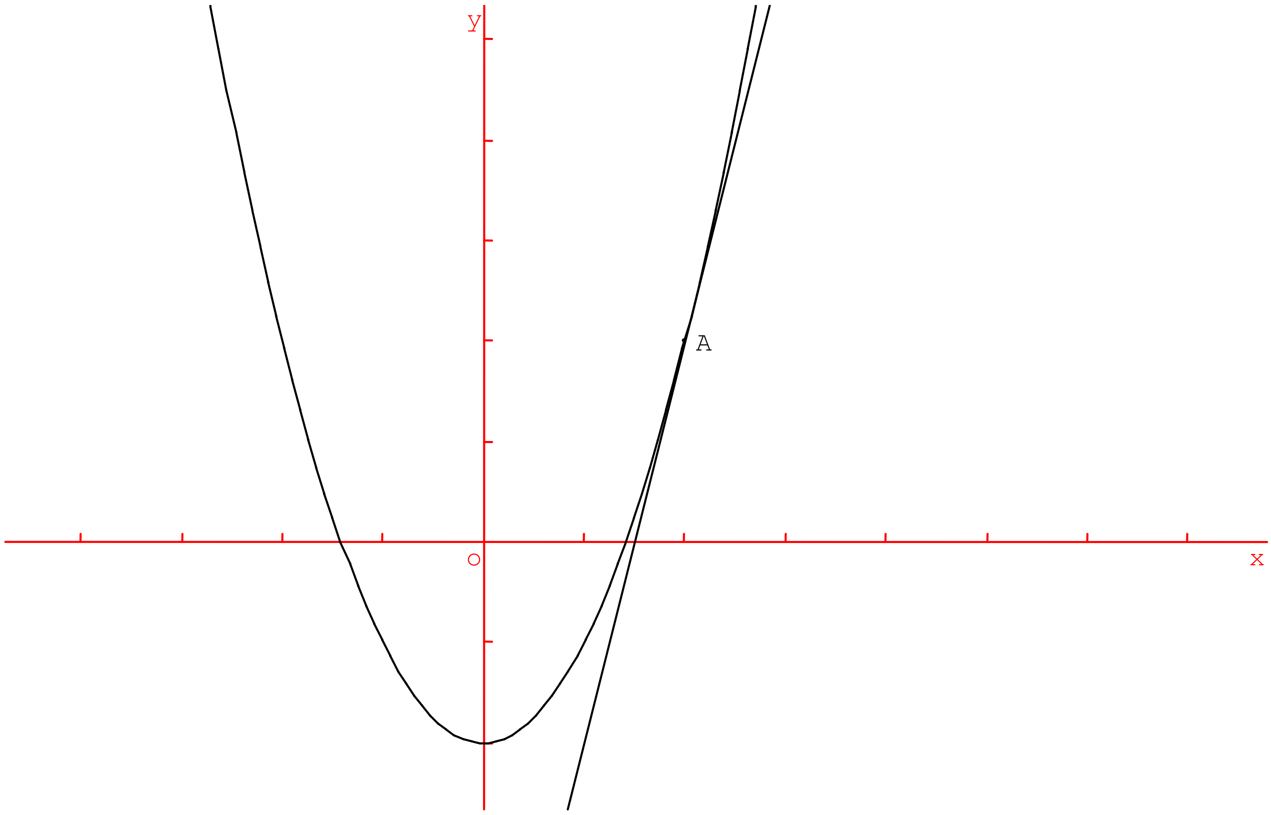
c) En déduire l'expression générale de v_n.

d) En déduire l'expression générale de x_n. Vérifier que (x_n) converge vers $\sqrt{2}$ lorsque n tend vers l'infini.

II) On considère la courbe représentative (C) de la fonction $x^2 - 2$. Soit A de coordonnées (a, a^2-2) un point de cette courbe, avec $a > 0$

a) Quelle est l'équation de la tangente à (C) en A ?

b) Si on considère a comme valeur approchée de $\sqrt{2}$, on obtient une autre approximation en considérant l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. Quelle est l'expression de l'abscisse b de cette intersection ?



c) A quelle condition sur a a-t-on $\left|b-\sqrt{2}\right| \leq \left|a-\sqrt{2}\right|$ (On rappelle que $a > 0$) ?

III) On définit la suite (y_n) par les relations $y_1 = 1$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{2}{y_n})$. Comparer les suites (x_n) et (y_n). (On pourra commencer par calculer quelques valeurs des deux suites). Laquelle converge le plus vite par $\sqrt{2}$?

SOLUTION du sujet n°4

EXERCICE 2

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b+c+1}(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM})$, donc :

si $a + b + c = 0$, alors $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}$. Il s'agit de la translation de vecteur $a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}$

sinon, un point fixe Ω existe, qui vérifie :

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{a+b+c+1}(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{O\Omega})$$

d'où $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{a+b+c}(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC})$. On en déduit que $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{a+b+c+1}\overrightarrow{\Omega M}$: il s'agit de l'homothétie de centre Ω de rapport $\frac{1}{a+b+c+1}$

PROBLEME

I) **a)** $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = 2$ d'où $r = \sqrt{2}$

b) $v_{n+1} = \dfrac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \dfrac{\dfrac{2 + x_n}{1 + x_n} - \sqrt{2}}{\dfrac{2 + x_n}{1 + x_n} + \sqrt{2}} = \dfrac{2 + x_n - \sqrt{2} - \sqrt{2}x_n}{2 + x_n + \sqrt{2} + \sqrt{2}x_n} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \dfrac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} v_n$. La suite est géométrique de raison $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$.

c) En outre $v_1 = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ donc $v_n = \left(\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right)^n$

d) $x_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}\sqrt{2} = \dfrac{1 + \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}\sqrt{2}$ qui tend vers $\sqrt{2}$ car $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ est en valeur absolue inférieur à 1 et donc v_n tend vers 0.

II) **a)** $y = 2a(x-a) + a^2 - 2 = 2ax - a^2 - 2$

b) $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a^2 + 2}{2a} = b$

c) $\left| b - \sqrt{2} \right| = \dfrac{\left| a - \sqrt{2} \right|^2}{2a}$. On veut donc que $\dfrac{\left| a - \sqrt{2} \right|}{2a} \leq 1 \Leftrightarrow \left| a - \sqrt{2} \right| \leq 2a$

$\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{2}a + 2 \leq 4a^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 2\sqrt{2}a - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (3a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

III) Les premières valeurs de la suite (x_n) sont :

$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{41}{29} \quad \frac{99}{70} \quad \frac{239}{169} \quad \frac{577}{408} \quad \frac{1393}{985} \quad \frac{3363}{2378} \quad \frac{8119}{5741} \quad \frac{19601}{13860} \quad \frac{47321}{33461} \quad \frac{114243}{80782} \quad \frac{275807}{195025} \quad \frac{665857}{470832}$

Celles de la suite (y_n) sont :

$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{577}{408} \quad \frac{665857}{470832}$

On a donc $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_4$, $y_4 = x_8$, $y_5 = x_{16}$. On conjecture donc que $y_n = x_{2^n}$. En effet, si on pose $q = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$, alors $x_n = \dfrac{1 + q^n}{1 - q^n}\sqrt{2}$ de sorte qu'on conjecture que $y_n = \dfrac{1 + q^{2^n}}{1 - q^{2^n}}\sqrt{2}$ On a alors :

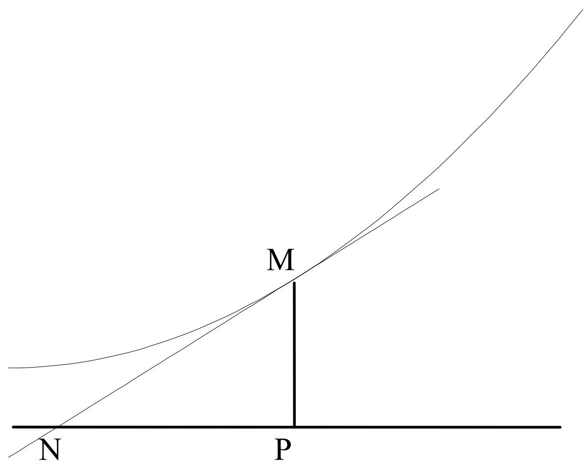
$$\frac{1}{2}\left(y_n + \frac{2}{y_n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1 + q^{2^n}}{1 - q^{2^n}} + \frac{1 - q^{2^n}}{1 + q^{2^n}} \right) = \sqrt{2}\,\frac{1 + q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^{n+1}}}$$

SUJET n°4 bis

Ce sujet est constitué d'une question de cours (par exemple l'exercice 1 du sujet n°1) et de trois autres exercices, soit quatre parties en tout. Nous en proposons quelques-uns ci-dessous.

EXERCICE 3

On considère une fonction f dérivable dont la dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse x appartenant à la courbe représentative de f, on considère le point P de coordonnées $(x,0)$ et le point N intersection de la tangente à la courbe de f en M avec l'axe des abscisses. Quelles sont les fonctions f pour lesquelles la différence entre les abscisses de P et de N est constante ?



EXERCICE 4

On présente ci-dessous les règles de conversions du franc en euro. On prend comme valeur de conversion : 1 euro = 6,47551 francs.

❑ Conversion de l'euro vers le franc : le montant en euro multiplié par le taux de conversion est égal au montant en franc. Le résultat exact de la multiplication comporte sept chiffres après la virgule. Pour obtenir un montant exprimé avec deux chiffres après la virgule, la règle suivante est appliquée :

si le troisième chiffre après la virgule est égal ou supérieur à 5, on arrondit au centime supérieur ;
si le troisième chiffre après la virgule est inférieur à 5, on arrondit au centime inférieur.

Exemples :
47,21 euros × 6,47551 = 305,7088271 F arrondi à 305,71 F
47,22 euros × 6,47551 = 305,7735822 F arrondi à 305,77 F

❑ Conversion du franc vers l'euro : le montant en franc divisé par le taux de conversion est égal au montant en euro. La même règle d'arrondi s'applique.
Exemples :
1321,24 F ÷ 6,47551 = 204,036438 euros, arrondis à 204,04 euros

Dans le cas où un montant exprimé à l'origine en euro est converti en franc puis reconverti en euro, le montant d'origine en euro est toujours retrouvé.
Exemple :
montant d'origine204,36 euros
montant en franc 204,36 × 6,47551 = 1323,3352236 arrondi à 1323,34 F
conversion inverse 1323,34 ÷ 6,47551 = 204,3607376 arrondi à 204,36 euros

Mais dans le cas où un montant exprimé à l'origine en franc est converti en euro puis reconverti en franc, le montant d'origine en franc peut différer du montant d'origine.
Exemple :
montant d'origine1323,35 francs
montant en euro 1323,35 ÷ 6,47551 = 204,3622819 arrondi à 204,36 euros

conversion inverse 204,36 × 6,47551 = 1323,3352236 arrondi à 1323,34 F

a) Montrer que dans le cas d'une double conversion euro → franc → euro, on retrouve toujours le résultat initial.

b) Quel écart maximal peut-on obtenir entre le montant d'origine en franc et le montant final après une double conversion franc → euro → franc ?

EXERCICE 5

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7.

a) On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Soit k un entier vérifiant $3 \le k \le 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro soit k ?

c) En déduire une expression de $\sum_{k=3}^{7} C_{k-1}^{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

d) Comment s'interprète la formule précédente dans le triangle de Pascal ?

e) Généraliser la formule précédente dans le cas de tirages de n boules numérotées de 1 à N. En donner une démonstration par récurrence sur N.

EXERCICE 6

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$). Soit F le point de coordonnées $(0, \frac{1}{4})$.

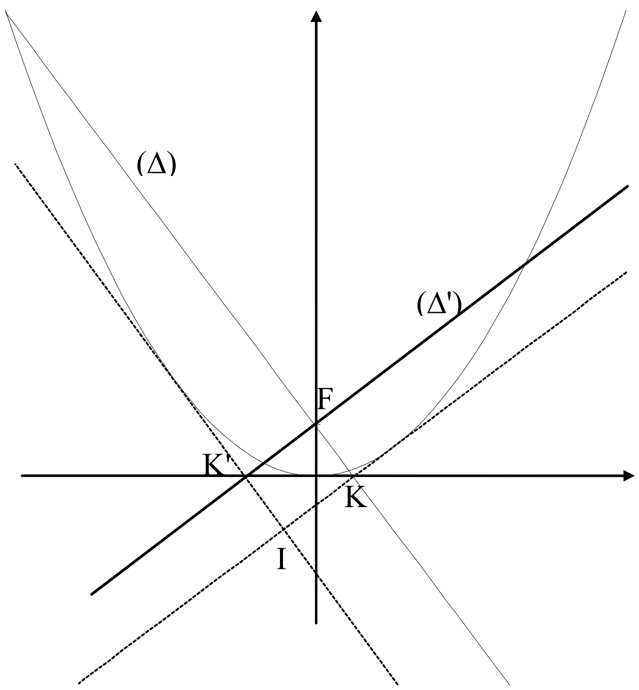
Soit (Δ) une droite passant par F, d'équation $y = ax + \frac{1}{4}$ où a est un réel non nul.

a) Quelle est l'équation de la droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) passant par F ?

b) (Δ) et (Δ') coupent l'axe des abscisses respectivement en K et K'. Donner les abscisses de K et K'.

c) Montrer que les perpendiculaires en K et K' à (Δ) et (Δ') sont tangentes à la parabole.

d) Montrer que ces deux tangentes se coupent en un point I dont l'ordonnée ne dépend pas de a.



SOLUTION du sujet n°4 bis

EXERCICE 3

M a pour coordonnées (x, y) avec $y = f(x)$. La pente de (NM) est $y' = f'(x)$. Donc la différence des abscisses de P et N est $\frac{y}{y'}$. On souhaite donc que $\frac{y}{y'}$ soit constante ou encore $y' = ky$. Il s'agit des courbes exponentielles $y = \lambda e^{kx}$.

EXERCICE 4

a) Considérons une somme e en euros. Sa valeur en francs vaut ec, où $c = 6{,}47551$. Cette valeur est arrondie à la valeur $f = ec + y$ où y est l'erreur d'arrondi avec $-0{,}005 < y \leq 0{,}005$. La deuxième conversion donne $\frac{f}{c} = e + \frac{y}{c}$ avec $-0{,}001 < -\frac{0{,}005}{c} < \frac{y}{c} \leq \frac{0{,}005}{c} < 0{,}001$.On retrouve la valeur de e avec une erreur inférieure à 1 millième d'euro. L'arrondi de $\frac{f}{c}$ redonne bien e.

b) Considérons une somme f en francs. Sa valeur en euros vaut $\frac{f}{c}$. Cette valeur est arrondie à la valeur $e = \frac{f}{c} + z$ où z est l'erreur d'arrondi avec $-0{,}005 < z \leq 0{,}005$. La deuxième conversion donne $ec = f + zc$ avec $-0{,}04 < -0{,}005c < zc \leq 0{,}005c < 0{,}04$. On commet donc une erreur inférieure ou égale à 3 centimes.
Exemple : 1323,37 francs donne 204,37 euros qui redonne 1323,40 francs.
De même, 1323,30 francs donne 204,35 euros qui redonne 1323,27 francs.

EXERCICE 5

a) C_7^3 **b)** Cela revient à choisir 2 boules parmi $k-1$, soit C_{k-1}^2 choix

c) $\sum_{k=3}^{7} C_{k-1}^2$ est le nombre de manière de choisir 3 boules de façons que le plus grand numéro vaille 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7, bref, il n'y a plus aucune condition particulière sur ce plus grand numéro. Cela revient donc à tirer 3 boules parmi 7. Donc $\sum_{k=3}^{7} C_{k-1}^2 = C_7^3$.

d) On attend une représentation du type suivant. La somme des termes encadrés est égale au terme fléché.

1							
1	1						
1	2	$\boxed{1}$					
1	3	$\boxed{3}$	1				
1	4	$\boxed{6}$	4	1			
1	5	$\boxed{10}$	10	5	1		
1	6	$\boxed{15}$	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

e) $\sum_{k=n}^{N} C_{k-1}^{n-1} = C_N^n$. La récurrence repose sur la propriété $C_N^n + C_N^{n-1} = C_{N+1}^n$

EXERCICE 6

a) (Δ') a pour équation $y = -\frac{x}{a} + \frac{1}{4}$.

b) $x_K = -\frac{1}{4a}$ et $x_{K'} = \frac{a}{4}$

c) La droite (Δ) a pour équation $y = ax + \frac{1}{4}$. Elle coupe l'axe des abscisses en $x_K = -\frac{1}{4a}$. La perpendiculaire a pour équation $y = -\frac{1}{a}(x + \frac{1}{4a})$. L'intersection de cette droite avec la parabole conduit à l'équation $x^2 + \frac{1}{a}(x + \frac{1}{4a}) = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4ax + 1 = 0$ soit $x = -\frac{1}{2a}$, la pente de la tangente à la parabole en ce point étant bien $-\frac{1}{a}$. Idem pour (Δ') où l'on remplace a par $-\frac{1}{a}$.

d) Les deux tangentes ont pour équation $y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{4a^2}$ et $y = ax - \frac{a^2}{4}$. Leur point commun vérifie $x = \frac{1}{4}(a - \frac{1}{a})$ et $y = -\frac{1}{4}$.