$1^{\text{ère}}$ L option mathématiques - Sujet 1

En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées. Toute calculatrice est autorisée.

Exercice 1 6 points

1) La proposition suivante est-elle vraie ? On justifiera la réponse.

Proposition : " Quelles que soient les fonctions f et g, définies sur un intervalle I, si f et g sont toutes les deux croissantes sur I, alors la fonction $f \times g$ est croissante sur I ".

2) Qu'appelle-t-on une suite arithmétique ?

Exercice 2 7 points

Le plan est rapporté à un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par Γ la courbe d'équation $y = 1{,}001x^2 - 1$ et par C la courbe d'équation $y = 1{,}01(x^2 - 0{,}99x + 2{,}02)$.

Déterminer le nombre de points d'intersection des courbes Γ et C.

Exercice 3 7 points

Une balle est lancée d'un point D vers un point A (trajet aller), puis est renvoyée de A vers D (trajet retour), à une vitesse de 60 mètres par seconde, que l'on admet constante pendant les trajets, en l'absence de toute perturbation (une perturbation pouvant être par exemple un courant d'air). La trajectoire de la balle est, à l'aller comme au retour, rectiligne.

Par moment, une perturbation de vitesse v (exprimée en mètres par seconde) telle que $0 < v < 60$, modifie la vitesse de la balle : la vitesse de la balle est alors égale à $60 - v$ sur le trajet aller et égale à $60 + v$ sur le trajet retour.

On se place dans le cas où $AD = 50$ (50 mètres).

L'objet du problème est de savoir si la perturbation diminue ou augmente la durée du trajet aller-retour de la balle.

1) Expérimenter en choisissant au moins trois valeurs de v et en comparant la durée du trajet aller-retour de la balle, suivant qu'elle est soumise ou non à la perturbation.

2) Emettre une conjecture qui réponde au problème posé.

3) Démontrer cette conjecture.

$1^{ère}$L option mathématiques – Sujet 2

En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées. Toute calculatrice est autorisée.

Exercice 1 6 points

1) La proposition suivante est-elle vraie ? On justifiera la réponse.

Proposition : " Quelle que soit la fonction f dérivable sur **R**, si $f(2) = -3$ et $f(5) = 4$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $[2 ; 5]$ ".

2) Calculer le dixième terme de la suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme 3.

Exercice 2 7 points

On considère deux suites arithmétiques :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 2 et de premier terme 7 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 3 et de premier terme 2.

1) Existe-t-il un rang n tel que $u_n = v_n$? Si oui, lequel ? Si non, pourquoi ?
2) Existe-t-il un rang n pour lequel le terme de rang n de l'une des suites est le double du terme de rang n de l'autre suite ? Si oui, lequel ? Si non, pourquoi ?

Exercice 3 7 points

On considère la fonction f qui à tout nombre réel x associe $(x-0{,}05)(x^2-0{,}3x+0{,}02)$.

On désigne par C sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Combien la courbe C a-t-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

2) Tracer la portion de C correspondant aux abscisses comprises entre 0,05 et 0,25 : on choisira convenablement le repère de façon à faire apparaître le résultat de la question précédente.

$1^{\text{ère}}$L option mathématiques – Sujet 3

En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées. Toute calculatrice est autorisée.

Exercice 1 6 points

On désigne par n, p, q des nombres entiers naturels non nuls.

1) Une entreprise emploie n personnes, dont p femmes.

Dans cette entreprise, quelle est la proportion de femmes par rapport à l'effectif total des employés ?

2) Cette entreprise décide d'augmenter son effectif et embauche q femmes et un homme.

Quelle est la proportion de nouveaux employés par rapport à l'effectif total qu'il y avait avant l'augmentation ?

3) Reprendre les deux questions précédentes dans le cas où :

$n = 25\ 650$, $p = 11\ 236$, $q = 34$.

On donnera les résultats sous forme de pourcentages.

Exercice 2 7 points

On désigne par f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 9$, pour tout x réel.

Voici le tableau de variation de f :

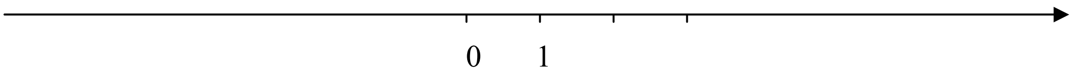
x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘		↗	
					-25		

Donner un encadrement d'amplitude la plus petite possible pour $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $x \in [0\,;1]$
2) $x \in [0\,;2]$
3) $x \in [0\,;5]$

Exercice 3 7 points

Un objet se déplace sur un axe gradué, en faisant des pas successifs d'une unité dans un sens ou dans l'autre : il part de l'abscisse 0 sur l'axe ; à chaque pas, on choisit au hasard de le faire avancer d'une unité ou bien reculer d'une unité.



On considère l'expérience aléatoire qui consiste à faire faire à l'objet un déplacement de cinq pas : on appelle un tel déplacement une marche aléatoire de cinq pas.

Première question

1. Simuler 30 marches aléatoires de cinq pas en utilisant la table de nombres aléatoires ci-jointe et relever les résultats en remplissant un tableau du type suivant :

	1^{er} pas	$2^{ème}$ pas	$3^{ème}$ pas	$4^{ème}$ pas	$5^{ème}$ pas	arrivée
$1^{ère}$ marche						
$2^{ème}$ marche						
…						

Dans la dernière colonne, pour chaque marche aléatoire de cinq pas, on indique l'abscisse du point d'arrivée et, dans les autres colonnes, *R* pour signifier que l'objet recule d'un pas ou *A* pour signifier qu'il avance d'un pas.

2. Quelles sont toutes les abscisses possibles des points d'arrivée d'une telle marche aléatoire de cinq pas ?

3. Dans la simulation précédente, quelle fréquence a-t-on obtenue de l'événement “ la marche aléatoire de cinq pas aboutit au point d'abscisse 1 ” ?

Deuxième question

Quelle est la probabilité de l'événement “ la marche aléatoire de cinq pas aboutit au point d'abscisse 1 ” ?

Table de nombres aléatoires

Cette table est composée de 165 nombres entiers compris entre 0 et 9 ; elle correspond aux résultats de 165 tirages au hasard d'un nombre entier compris entre 0 et 9, chaque tirage étant considéré comme indépendant de chacun des autres.

7	0	5	7	3	1	5	8	5	9	5	7	2	3	1
8	5	8	9	0	9	1	7	1	9	9	2	1	8	2
8	3	4	0	0	2	9	1	4	1	3	9	4	7	3
5	7	9	3	3	1	0	2	6	5	3	7	9	1	3
9	6	4	0	9	2	1	0	8	4	6	8	4	9	7
1	4	0	3	4	4	7	6	2	1	4	0	4	2	9
0	8	9	6	8	9	8	1	0	3	6	2	8	1	5
9	3	6	3	2	8	8	7	6	3	1	4	2	8	4
5	2	3	5	5	4	2	2	3	5	7	2	2	3	0
5	6	1	8	0	7	7	9	9	4	2	6	5	9	1
5	5	0	8	2	3	0	9	7	7	2	8	5	7	3

Mode d'emploi de la table pour simuler des marches aléatoires de cinq pas

On parcourt la table de nombres aléatoires dans le sens habituel de lecture ; on traduit chaque nombre rencontré par R (“ recule ”) s'il est impair, et par A (“ avance ”) s'il est pair ; cinq nombres successifs permettent ainsi de définir une marche aléatoire de cinq pas.

Par exemple, les cinq premiers nombres de la table, qui sont “ 7 0 5 7 3 ” définissent la première marche aléatoire de cinq pas, que l'on codera “ $R\ A\ R\ R\ R$ ” ; on remplit ainsi le tableau :

	1er pas	2ème pas	3ème pas	4ème pas	5ème pas	arrivée
1ère marche	R	A	R	R	R	-3

On passe ensuite à “ 1 5 8 5 9 ” qui simule la deuxième marche aléatoire de cinq pas …