Expérimentation d'évaluation en 1ère

Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 1

Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (6 points)

Les fonctions f et g de la variable réelle x sont toutes deux croissantes sur l'intervalle $[-1 ; +1]$.

1. Est-il vrai que la somme $f+g$ de ces deux fonctions qui à x associe $f(x)+g(x)$ est également croissante ?
   Si oui, le démontrer ; si non, donner un contre-exemple simple.
2. Est-il vrai que le produit $f \times g$ de ces deux fonctions qui à x associe $f(x) \times g(x)$ est également croissante ?
   Si oui, le démontrer ; si non, donner un contre-exemple simple.

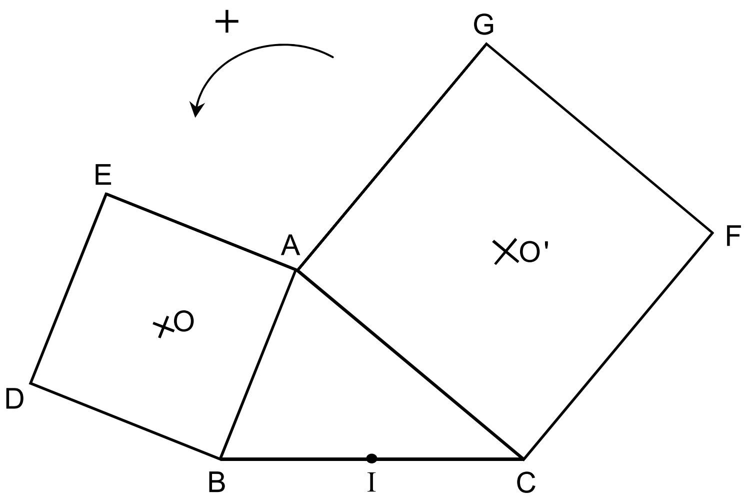
Exercice 2 (7 points)

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $x \mapsto x^2$ et par $\mathcal{D}$ une droite passant par le point A (2 ; 0) et pivotant autour de ce point.

1. Ecrire une équation de $\mathcal{D}$.
2. Quels sont tous les cas possibles pour l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$? On précisera si les points d'intersection sont simples ou doubles.

Exercice 3 (7 points)

On considère dans le plan orienté, un triangle quelconque ABC direct. Sur les côtés [AB] et [AC] on construit les carrés respectifs directs AEDB et ACFG.
Soient O et O' les centres respectifs de ces carrés et I le milieu de [BC].



Démontrer que le point I est équidistant des centres O et O' et que les droites (IO) et (IO') sont orthogonales.

Expérimentation d'évaluation en 1$^{\text{ère}}$

Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 2

Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (6 points)

Voici le tableau de variations d'une fonction f, définie sur l'intervalle $[-7; 7]$, dans lequel sont indiquées quelques valeurs de $f(x)$.

x	-7		-3		1		7
variations de f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Pour chacune des questions ci-dessous, indiquer si ce tableau de variation permet de comparer les deux nombres proposés et si oui les comparer à l'aide de l'un des symboles $>$, $<$ ou $=$:

i) $f(-5)$ et 3 ***ii)*** $f(-2)$ et $f(0)$ ***iii)*** $f(3,5)$ et 5 ***iv)*** $f(-4,5)$ et $f(2,3)$ ***v)*** $f(-4)$ et $f(-2)$.

Exercice 2 (7 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x^n$. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A un point de Γ d'abscisse a.

Torricelli donne une méthode géométrique pour tracer la tangente à Γ en A :

- *Construire le projeté H de A sur l'axe des ordonnées du repère.*
- *Placer le point I tel que : $\overrightarrow{HI} = n.\overrightarrow{HO}$.*
- *Alors la droite (IA) est la tangente à Γ en A.*

1. Déterminer les coordonnées des différents points cités ci-dessus.

2. Démontrer que l'affirmation de Torricelli est exacte.

3. **Mise en œuvre de la construction de Torricelli dans un cas particulier :**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3$. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour la figure, prendre en cm :

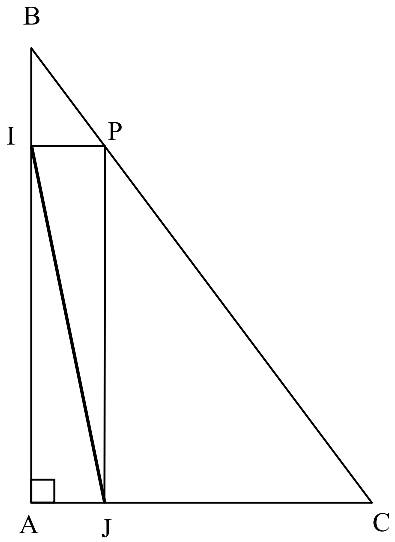
$$\|\vec{u}\| = 5 \text{ et } \|\vec{v}\| = 0,5.$$

a. Placer les points de Γ d'abscisses 1, 2 et $\frac{3}{2}$.

b. En utilisant la méthode de Torricelli, construire les tangentes à Γ en ces trois points.

c. Placer les points de Γ d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$, puis tracer Γ pour des abscisses comprises entre 0 et 2.

Exercice 3 (7 points)



Le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse [BC]. Soit P un point de [BC] et soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de P sur [AB] et sur [AC].

Déterminer sur [BC] un point P tel que la distance IJ soit minimum. Est-il unique ?
Dans ce cas, comment doit être le triangle ABC pour que le segment [IJ] soit parallèle à [BC] ?

Expérimentation d'évaluation en 1ère

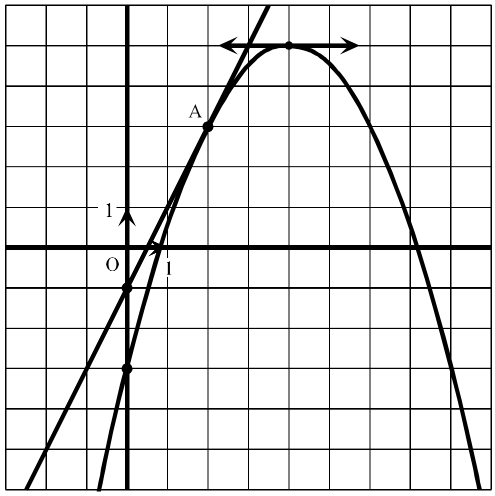
Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 3

Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (6 points)

Pour le graphique ci-contre, le repère est orthonormal, les points en gras appartiennent aux différents tracés et sont à des nœuds du quadrillage.



On y a représenté une parabole, la tangente en son sommet, ainsi que sa tangente au point A de coordonnées (2 ; 3)

1. Déterminer une équation de la tangente au point A à cette parabole.
2. Déterminer une équation de cette parabole.

Exercice 2 (7 points)

1. Étant donnés quatre réels a, b, c et d, on considère une fonction polynôme P de degré 3 définie pour tout réel x par $P(x)= ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui admet exactement deux racines réelles α et β. Quelles sont les deux factorisations possibles de P(x) ? On justifiera la réponse.

2. On considère la fonction polynôme P définie, pour tout réel x, par :

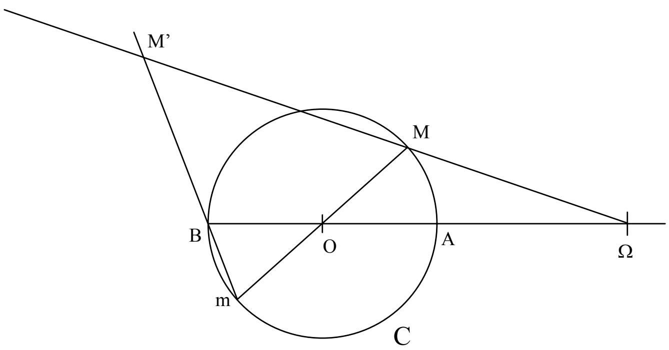
$P(x)= x^3 - 86\,x^2 - 3\,975\,x + 360\,000$

a) Conjecturer, à l'aide d'une calculatrice graphique, le nombre de racines de P(x). Reproduire à main levée l'esquisse de l'écran qui a permis de conjecturer.

b) En utilisant l'une des deux factorisations de P(x) demandées à la question 1, déterminer les racines de P(x).

Exercice 3 (7 points)

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [AB]. Le point $\Omega \neq$ A appartient à la droite (AB). À tout point M du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et de B, on associe le point m diamétralement opposé à M sur le cercle $\mathcal{C}$ et le point M', intersection des droites (ΩM) et (mB).
Déterminer l'ensemble Γ des points M' puis construire Γ.



Expérimentation d'évaluation en 1ère

Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 4

Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (6 points)

Montrer que tout triangle isocèle a deux médianes de même longueur.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 (7 points)

On note t le réel élément de l'intervalle $[0,\pi]$ tel que : $\cos t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

a. Justifier que t est élément de l'intervalle $[0,\frac{\pi}{4}]$

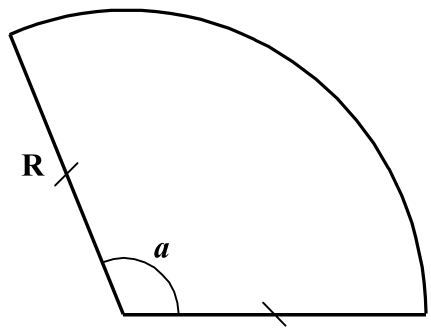
b. Calculer $\cos(2t)$

c. Démontrer que $\cos(4t) = -\cos(t)$.

d. En déduire la valeur exacte de t.

Exercice 3 (7 points)

Dans un pays imaginaire, pour la culture des potirons les terrains doivent tous avoir la forme de secteurs circulaires mais sans pour autant avoir la forme d'un disque.



1. L'un des habitants vient d'obtenir le droit de cultiver des potirons à condition qu'il le fasse sur un terrain de périmètre égal à 100 mètres. Son intérêt étant de le prendre d'aire maximum, comment doit-il choisir le rayon **R** (en mètres) et la mesure ***a*** (en radians) de l'angle de son terrain ?
2. Et si on lui impose l'aire de son terrain, par exemple 10 000 m², comment doit-il choisir le rayon (en mètres) et l'angle (en radians) de son terrain pour avoir le minimum de frais de clôture ?
3. Quelle conjecture peut-on émettre sur ***a*** suite à la résolution des deux questions précédentes ?

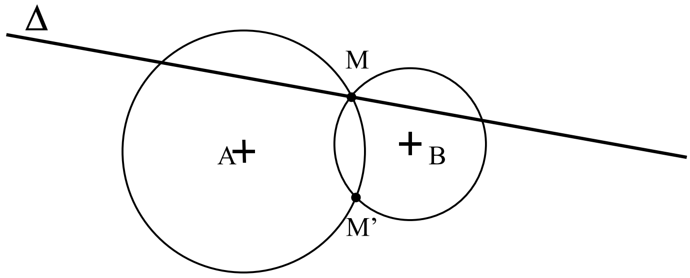
Expérimentation d'évaluation en $1^{ère}$

Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 5

Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (6 points)



Une droite Δ étant donnée, ainsi que deux points A et B n'appartenant pas à Δ et d'un même côté par rapport à Δ, pour tout point M de Δ et tel que M $\notin$ (AB), on considère les cercles de centres respectifs A et B et passant par M.

a) Justifier que ces deux cercles se recoupent nécessairement en un deuxième point M' distinct de M.

b) Quel est le lieu des points M' lorsque M décrit Δ. Le représenter sur le dessin ci-dessus.

Exercice 2 (7 points)

On considère une fonction *f* dont on ne connaît que quelques propriétés locales :

- ♦ *f* est définie sur I = [–7 ; –1 [∪] –1 ; 1]
- ♦ *f* est dérivable en tout point où elle est définie
- ♦ sur I, sa dérivé ne s'annule qu'en –4
- ♦ le signe de sa dérivée *f'* est donné sur I par le tableau ci-dessous :

x	-7		-4		-1		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

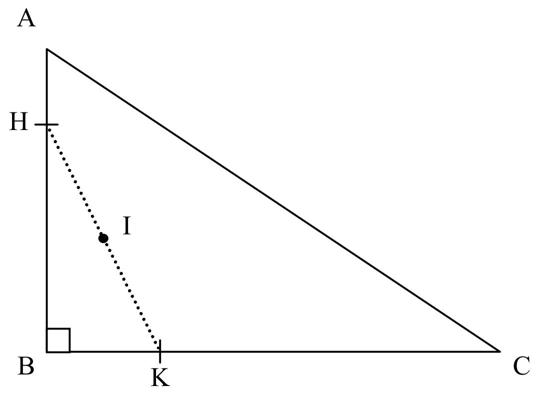
1. a) Sur quel(s) intervalles *f* est-elle croissante ? décroissante ?

b) Peut-on comparer $f(a)$ et $f(b)$ si $0 < a < b < 1$? Justifier.
Peut-on comparer $f(-5)$ et $f(-3)$? Justifier.
Peut-on comparer $f(-4)$ et $f(-6)$? Justifier.
Peut-on comparer $f(-2)$ et $f(0)$? Justifier.

2. On sait maintenant que la fonction f est de la forme $x \mapsto \dfrac{x^2 + bx + c}{dx + e}$ (avec $d \neq 0$).
Déterminer une fonction f vérifiant les propriétés données au début de l'énoncé.

Exercice 3 (7 points)

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que **2BC = 3AB**.
Un point H et un point K sont mobiles respectivement sur le segment [AB] et sur le segment [BC] de telle façon que **2BK = 3AH**.
On note I le milieu (mobile) du segment [HK].



Quel est l'ensemble décrit par le point I quand le point H décrit le segment [AB] ? (justifier)

Le problème serait-il différent si le triangle ABC n'était pas rectangle ?

Expérimentation d'évaluation en 1ère

Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 6

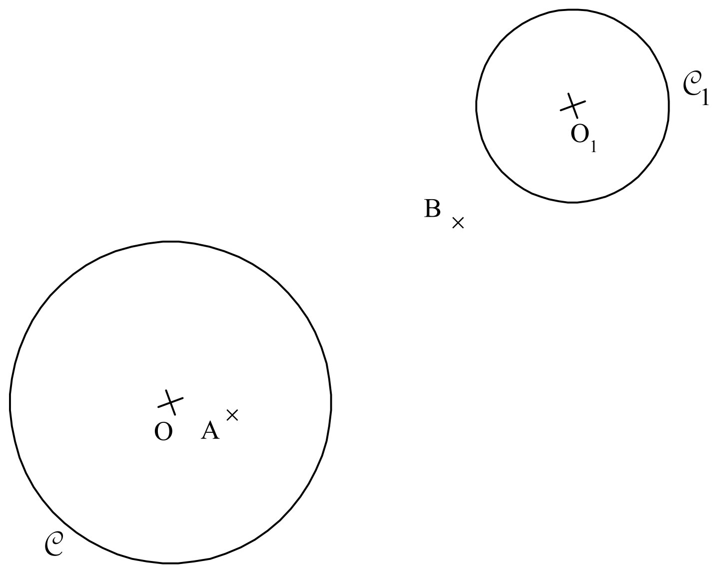
Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (6 points)

1. On considère une suite arithmétique (U_n) telle que $U_{1975} = 1515$ et $U_{1998} = 1998$.
   a) Calculer sa raison r et son premier terme U_0 .
   b) Y a-t-il un terme de cette suite égal à 1 ? à 234 ?
2. On considère une suite géométrique (V_n) telle que $V_{2000} = 2^{10}$ et $V_{1990} = 3^{10}$.
   Calculer V_{1998}

Exercice 2 (7 points)

Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$, de centres respectifs O et O_1, et deux points A et B, trouver tous les parallélogrammes ABM_1M qu'il est possible de construire avec le point M sur $\mathcal{C}$ et le point M_1 sur $\mathcal{C}_1$.
Est-ce toujours possible ?



Exercice 3 (7 points)

On se propose de résoudre l'équation (E) : $\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

1. Ouvrir un peu les yeux…
(E) admet deux solutions ‘‘remarquables’’. Les trouver en justifiant.

2. **Justifier** que sur [0 ; π], (E) est **équivalente** à $\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, puis en déduire le résolution de (E) sur [0 ; π].

3. Et si on multipliait les deux membres de l'équation de départ par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ …
Le faire et en déduire une nouvelle manière de résoudre (E).

4. Que pensez-vous des trois démarches proposées :
   - permettent-elles chacune de résoudre l'équation (E) <u>sur $\mathbb{R}$</u> ?
   - sont-elles équivalentes ?
   - laquelle a votre préférence et pourquoi ?…

Expérimentation d'évaluations en classe de première

Mai 1999 **durée 2 heures**

PREMIERE S

Sujet 7

Exercice 1 : (5 points)

Deux fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Peut-on déduire le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de :

a) la fonction g o f , composée des fonctions f et g ?
b) la fonction f x g , produit des fonctions f et g ?

Si la réponse est " oui ", énoncer puis démontrer le résultat.
Si la réponse est " non ", expliquer pourquoi en s'appuyant éventuellement sur un exemple.

Exercice 2 : (8 points)

Pour chaque question, il y a quatre propositions (1), (2), (3) et (4).
Indiquer pour chacune d'elles uniquement si elle est vraie ou fausse (il peut y avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 réponses vraie(s)).
Barème : bonne réponse : 0,5 point ; réponse fausse : - 0,25 point ; pas de réponse : 0 point.

Question 1

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{3x+1}{2x+3}$

On désigne par *C* sa courbe représentative dans un repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).

(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

(2) $f'(x) = \frac{-7}{(2x+3)^2}$j

(3) La tangente au point d'abscisse 2 à la courbe *C* a pour équation $y - 1 = \frac{1}{7}(x-2)$

(4) La droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe *C*.

Question 2

Soit ABC un triangle, le cercle de diamètre [BC] coupe (AB) en M et (AC) en N.

Les droites (BN) et (CM) se coupent en H.

(1) $BC^2 = BM^2 + MC^2$

(2) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}$

(3) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$

(4) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$

Question 3

Soit ABC un triangle, A' le barycentre de {(B;2),(C;3)}, B' le barycentre de {(A;1),(C;3)}, C' le barycentre de {(A;1),(B;2)} et G le barycentre de {(A;1);(B;2),(C;3)}.

(1) G est le milieu de [CC']

(2) si M est quelconque alors $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC} = 6\,\overrightarrow{MG}$

(3) A est le barycentre de {(B;2),(C;3),(G;-6)}

(4) $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

Question 4

On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = 4\,x^3 + 28x^2 - 115x + 50$.

(1) l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution négative.

(2) l'équation f(x) = 0 admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

(3) Pour tout $x \in [0;3]$ $f(x) > 0$.

(4) f est croissante sur $[2; +\infty[$.

Exercice 3 : (7 points) (d'après les annales FFJM)

L'Emir Hifik a conservé les bougies de ses gâteaux d'anniversaire depuis son premier anniversaire jusqu'à aujourd'hui sauf celles d'une année où il était trop malade pour fêter quoi que ce soit. Il possède actuellement 1999 bougies.
Quel âge avait-il lorsqu'il n'a pu fêter son anniversaire ?

Expérimentation d'évaluations en classe de première

Mai 1999 **durée 2 heures**

PREMIERE S

Sujet 8

En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.
Calculatrice autorisée

Exercice 1 : (6 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des propositions énoncées est exacte.
Indiquer uniquement sur la copie le numéro de la question (Q1 à Q8) et la réponse exacte associée (1), (2), (3) ou (4).

Barème : bonne réponse : + 0,75 point ; réponse fausse : - 0,5 point ; pas de réponse : 0 point.

Q1- Soit f une fonction polynôme du second degré ($f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$).

Voici deux affirmations :

a) *Si quel que soit x, $f(x) < 0$ alors le discriminant est strictement négatif.*

b) *Si quel que soit x, $f(x) > 0$ alors le discriminant est strictement positif.*

(1) Les deux affirmations sont fausses.

(2) Les deux affirmations sont vraies.

(3) L'affirmation a) est vraie et l'autre est fausse.

(4) L affirmation b) est vraie et l'autre est fausse.

Q2- Soit f une fonction définie et dérivable sur ℝ.

Voici deux affirmations :

a) *Si la fonction dérivée f ' s'annule en a, alors f admet un extremum local en a.*

b) *Si f admet un extremum local en a, alors f '(a) = 0.*

(1) Les deux affirmations sont fausses.

(2) Les deux affirmations sont vraies.

(3) L'affirmation a) est vraie et l'autre est fausse.

(4) L'affirmation b) est vraie et l'autre est fausse.

Q3- Soient f et g deux fonctions affines définies sur ℝ telles que :

$f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 5x - 2$

(1) $g \circ f(x) = 10x - 1$

(2) $g \circ f(x) = 10x + 13$

(3) $g \circ f(x) = 10x^2 + 11x - 6$

(4) $g \circ f(x) = 7x + 1$

Q4- Le nombre de solutions de l'équation sin (2x) = cos (3x) sur [0; 2 π] est :

(1) 3

(2) 4

(3) 5

(4) 6

Q5- $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ est l'équation du cercle :

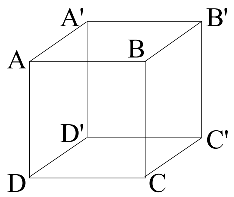
(1) de centre C (2 ; – 4) et de rayon $\sqrt{31}$

(2) de centre C (1 ; – 2) et de rayon 4

(3) de centre C (– 1 ; 2) et de rayon 4

(4) de centre C (2 ; 4) et de rayon 3

Q6- Dans le cube suivant :



(1) (A'C) $\perp$ (AC')

(2) (A'B) $\perp$ (BC')

(3) (AC') $\perp$ (A'D)

(4) (AD') $\perp$ (A'C')

Q7- Soit ABCD un carré de côté 1 et I le milieu de [BC] alors le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}$ vérifie :

(1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

(2) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$

(3) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = 1$

(4) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}$

Q8- Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$.
On considère l'homothétie h de centre A telle que h(C) = B, alors le rapport de h est :

(1) $\frac{1}{2}$

(2) 2

(3) $\frac{1}{3}$

(4) 3

EXERCICE 2 : (7 points)

On désigne par C un cercle de centre O et de rayon 1 et par D le disque qu'il délimite.

<u>Partie A</u>

1°/ Déterminer le rayon r_1 du cercle C_1 de centre O tel que la couronne circulaire D_1 limitée par C et C_1 ait même aire que D. Tracer C et C_1 sur une figure qui pourra ensuite être complétée.

2°/ On pose $C_0 = C$, $D_0 = D$ et $r_0 = 1$.

On considère la suite de cercles C_0 , C_1 , C_2 , C_3 … C_n … de centre commun O et dont les rayons r_0 , r_1 , r_2 , r_3 … r_n… constituent une suite croissante telle que les aires des couronnes circulaires D_1 , D_2 , D_3… D_n… limitées par deux cercles consécutifs soient égales à celle de D_0.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $r_n = \sqrt{n+1}$.

b) Dans cette question, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
A partir de quelle valeur de n l'épaisseur de la couronne limitée par C_n et C_{n-1} est-elle inférieure à 0,05 ?

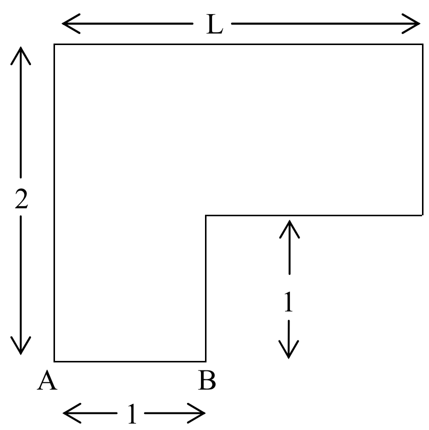
<u>Partie B</u>
On pose $C'_0 = C$, $D'_0 = D$ et $r'_0 = 1$.

On considère maintenant la suite de cercles C'_0 , C'_1 , C'_2 , C'_3 … C'_n …de centre commun O et dont les rayons r'_0 , r'_1 , r'_2… r'_n … constituent une suite croissante, telle que les aires du disque D'_0 et des couronnes circulaires D'_1 , D'_2 , D'_3 … D'_n … limitées par deux cercles consécutifs forment une progression géométrique de premier terme l'aire de D'_0 et de raison 2.

1°/ Exprimer r'_n en fonction de n.

2°/ Si l'on souhaitait construire la figure en vraie grandeur sur une feuille rectangulaire de format 21cm x 29,7cm, à partir du cercle C'_0 de rayon 1cm, combien de cercles de la suite précédente pourrait-on tracer ?

EXERCICE 3 : (7 points)



Une fine plaque homogène d'épaisseur constante représentée ci-contre.

Posée sur le côté [AB] dans un plan vertical, elle est en équilibre lorsque le projeté orthogonal de son centre d'inertie sur (AB) est situé entre A et B.
Pour quelles valeurs de L cette plaque est-elle en équilibre ?

Sujet 8 – Première S

***Commentaires** :*

Exercice 1 :
Les différentes questions abordent des domaines très variés.

Exercice 2 :
La partie A permet de se familiariser avec la cible.
La question 1 permet d'entrer dans le problème et dans la question 2,a) on donne le terme général de la suite, ce qui permet de vérifier le premier résultat et d'aborder le b.
Dans la partie B, on s'intéresse à une cible construite de manière analogue, mais on change la contrainte sur les aires. On se ramène alors à l'étude de la somme des termes d'une suite géométrique.
La recherche des solutions sera menée grâce à la calculatrice.

Exercice 3 :
L'exercice se ramène à la recherche du centre d'inertie de la plaque constituée de deux rectangles.
La position de la plaque et ses dimensions suggèrent l'introduction d'un repère orthonormé.
La contrainte d'équilibre se traduit alors par l'encadrement de l'abscisse du centre d'inertie qui ramène à la résolution d'une équation du second degré.
Autre méthode possible : recherche géométrique de la longueur L correspondant à la position " limite " du centre d'inertie (à la verticale de B).

Expérimentation d'évaluation en $1^{\text{ère}}$

Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 9

Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (5,5 points)

1. Montrer qu'un triangle isocèle a deux médianes de même longueur
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 (5,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout vecteur $\vec{u}(x,y)$ et tout vecteur $\vec{v}(x',y')$, on pose :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=xy'-yx'$$

On peut démontrer (la démonstration n'est pas demandée ici) que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls,

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{u},\vec{v})$$

Pour tout vecteur $\vec{u}(x,y)$ et tout vecteur $\vec{v}(x',y')$, on pose :

$$\vec{u}*\vec{v}=(\vec{u}.\vec{v})\,\vec{i}+\det(\vec{u},\vec{v})\,\vec{j}$$

1. Calculer $(\vec{i}+\vec{j})*(3\vec{i}-2\vec{j})$.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.
   a) Déterminer les vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{u}*\vec{v}$ soit colinéaire à $\vec{i}$.
   b) Déterminer les vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{u}*\vec{v}$ soit colinéaire à $\vec{j}$.
   c) Déterminer les vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{u}*\vec{v} = \vec{0}$.
3. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de normes 1 et tels que l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ ait pour mesure $\frac{5\pi}{6}$.
   Calculer $\vec{u}*\vec{v}$ et $\vec{v}*\vec{u}$
4. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs quelconques. Comparer $\vec{u}*\vec{v}$ et $\vec{v}*\vec{u}$.

Exercice 3 (9 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 2 cm pour unité de longueur.

On considère la courbe Γ d'équation $y = x^2$ et le point A de coordonnées $\left(1, \frac{17}{4}\right)$.

On s'intéresse au problème suivant : existe-t-il des points M de Γ tels que la droite (AM) et la tangente en M à Γ soient perpendiculaires ?

1. Montrer qu'il existe exactement trois points solutions du problème. On notera B, C et D ces points, en convenant que leurs abscisses vérifient $x_B<x_C<x_D$.
2. En considérant la distance AM comme une fonction de x, abscisse du point M, montrer que les abscisses des points B, C et D correspondent aux changements de sens de variation de AM lorsque M décrit Γ.
3. Déterminer une équation de la droite (BC). (On pourra éviter les calculs).
4. Tracer la courbe Γ et les points A, B, C et D sur une figure.

Expérimentation d'évaluation en 1$^{\text{ère}}$

Mai 1999 **durée : 2 heures**

Première S - Sujet 10

Les calculatrices sont autorisées. En l'absence d'indication contraire dans l'énoncé, toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (5 points)

On donne un carré ABCD et I, J et K les points définis par :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}.$$

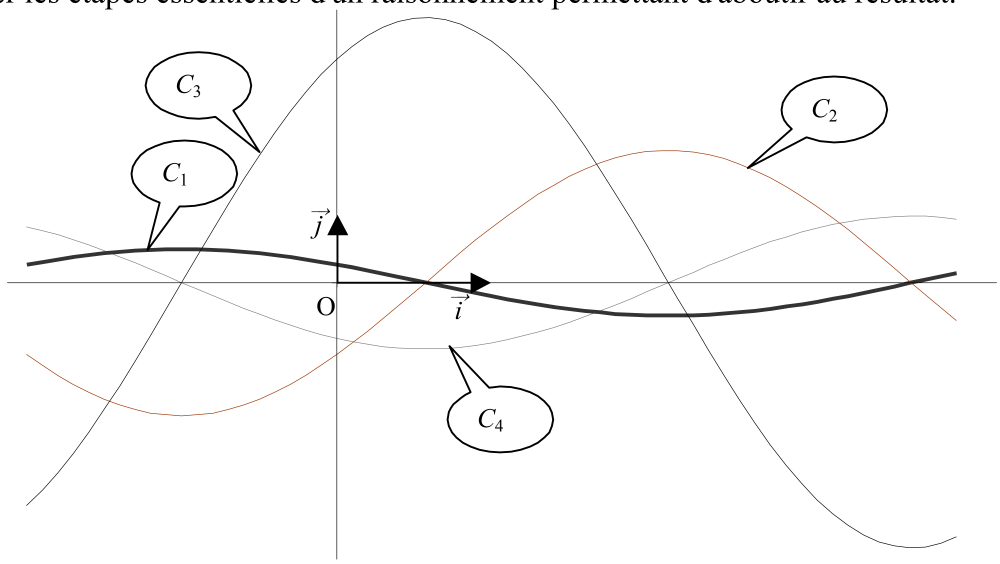
1. Indiquer avec précision trois méthodes permettant de démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
2. Proposer une démonstration utilisant une de ces méthodes, au choix.

Exercice 2 (5 points)

Sur la figure ci-dessous sont tracées quatre courbes C_1, C_2, C_3 et C_4.
Ces courbes représentent, dans un repère orthonormal, des fonctions f, g, h et j.
L'exercice consiste à associer à chaque courbe le nom de la fonction qu'elle représente, sachant que les fonctions f, g, h et j sont dérivables et que :

$$f' = g,\ g' = h \text{ et } h' = j.$$

Présenter les étapes essentielles d'un raisonnement permettant d'aboutir au résultat.



Exercice 3 (10 points)

Si x et y sont deux réels strictement positifs, on appelle moyenne arithmétique, moyenne géométrique, moyenne harmonique et moyenne quadratique les nombres a, g, h et q respectivement définis par :

$$a = \frac{x+y}{2} \ , \quad g = \sqrt{xy} \ , \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \text{ et } q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

1. Calculer a, g, h et q pour $x = 30$ et $y = 40$
2. Pour x et y strictement positifs donnés, comparer g et h.
3. Pour la suite de l'exercice, *on admet que*, quels que soient les réels strictement positifs x et y, on a :

$$h \leq g \leq a \leq q$$

   Montrer que a, g, h et q sont compris entre x et y.
4. On donne trois points A, B et C tels que B ∈ [AC]. On pose AB = x et BC = y, et on trace les demi-cercles de centre O milieu de [AC] et de rayon OA et OB, conformément à la figure ci-dessous.
   a) Démontrer que OD = a.
   b) Démontrer que BD = g.
   c) Démontrer que DF = h.
   d) Démontrer que DE = q.