Exercice 1

1)L'ensemble de définition de f est l'intervalle [-2 ;5].

2)L'image de 1 est 3, celle de 5 est -5,5.

3)Rechercher les solutions de f(x)=-1 revient à rechercher le nombre d'antécédents de -1 par f. On en compte trois, l'un compris entre -2 et -1, le deuxième entre -0,5 et 0 et le dernier est 2.

4)Le seul dont on puisse obtenir la valeur exacte est 2.

5)On recherche ici les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieur à -3. On obtient par lecture graphique l'ensemble [-2 ;4[.

6)

x	-2		$-0,5$		1		5
$f(x)$	$-5/7$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-5,5$

7)Toute valeur strictement inférieure à -5,5 ou strictement supérieur à 3 convient.

8)a)

x	f(x)
2	-1
2,5	-1,125
3	-1,5
3,5	-2,125
4	-3
4,5	-4,125
5	$-5,5$

b)L'antécédent de -2 compris entre 2 et 5 est -3,41 en arrondissant au centième.

Exercice 2

1)a)$\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{3}$ sont compris dans l'intervalle [-3 ;0,5] sur lequel la fonction f est décroissante. Comme $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{3}$ on a alors $f\left(\dfrac{1}{4}\right) \geq f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ par décroissance de f.

b) On ne peut rien conclure.

c)$-4 \in [-5;-3]$, or sur cet intervalle la fonction f prend des valeurs comprises entre -2 et 0 , on en déduit alors que $f(-4) \leq 0$. De même $1,5 \in [1;2]$ intervalle sur lequel f prend des valeurs comprises entre 0 et 3, par conséquent $f(1,5) \geq 0$. On a alors :

$$f(-4) \leq 0 \leq f(1,5).$$

Et donc :

$$f(-4) \leq f(1,5).$$

2)a) Le minimum de f sur [-5 ;2] est -2 atteint en -5.

b) Le maximum de f sur [-5 ;1] est 0 atteint en -3 et 1.

3)

x	-5		-3		1		2
signe de $f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3

1)$f(x) = (3x+2)^2 - 9 = 9x^2 + 12x + 4 - 9 = 9x^2 + 12x - 5.$

2)On développe l'expression (3x-1)(3x+5) :

$$(3x-1)(3x+5) = 9x^2 + 15x - 3x - 5 = 9x^2 + 12x - 5.$$

on obtient $9x^2 + 12x - 5$ qui est égale à f(x) d'après la question précédente. On a ainsi montré que f(x)=(3x-1)(3x+5). On peut également partir de l'expression 1 et factoriser :

$$(3x+2)^2 - 9 = (3x+2)^2 - 3^2 = (3x+2-3)(3x+2+3) = (3x-1)(3x+5).$$

3)a) en utilisant l'expression 2 on obtient que :

$$f\left(\sqrt{3}\right) = 9\left(\sqrt{3}\right)^2 + 12\sqrt{3} - 5 = 22 + 12\sqrt{3}.$$

b)La forme la plus adaptée pour résoudre cette équation est la forme factorisée(expression 3) car elle permet d'utiliser directement la règle du produit nul :

f(x)=0 s'écrit alors (3x-1)(3x+5)=0.

On a alors :

∗ Soit 3x-1=0 ce qui nous donne $x = \frac{1}{3}$.

∗ Soit 3x+5=0 ce qui nous donne $x = -\frac{5}{3}$

L'ensemble S des solutions est donc : $S = \left\{-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right\}$.

c) La forme la plus adaptée ici est l'expression 1 car elle nous donne :

$$(3x+2)^2 - 9 = -9$$

On simplifie et on obtient alors :

$$(3x+2)^2 = 0$$

Ce qui est équivalent à $3x + 2 = 0$ qui a pour solution $x = -\frac{2}{3}$

Exercice 4 :

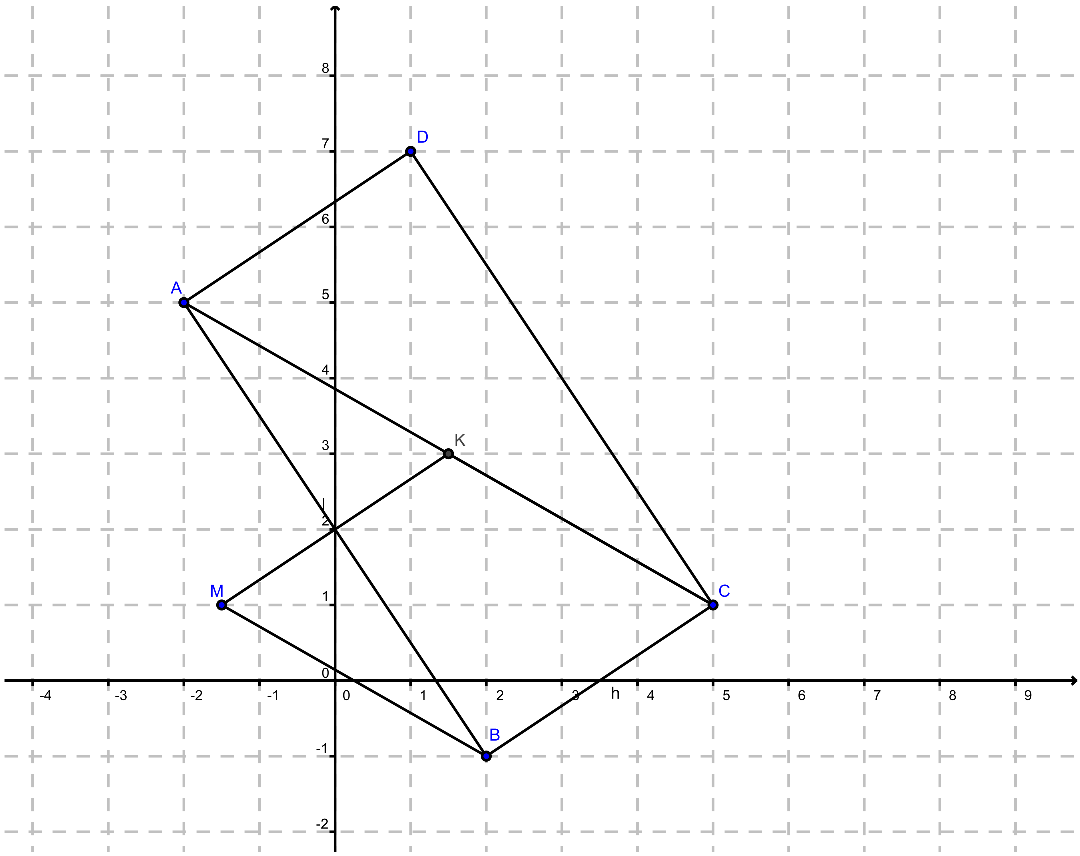
1) Voir la figure ci-dessous.

2) On cherche à utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. On commence par calculer le carré de la longueur de chaque coté du triangle ABC :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (2+2)^2 + (-1-5)^2 = 16 + 36 = 52$$

On obtient de même : $BC^2 = 13$ et $AC^2 = 65$

Ainsi $AC^2 = AB^2 + BC^2$, le triangle est donc rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore.



3) Soit $(x_D; y_D)$ les coordonnées de D. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(x_C - x_B; y_C - y_B) = (3; 2)$, celles de $\overrightarrow{AD}$ sont $(x_D - x_A, y_D - y_A) = (x_D + 2; y_D - 5)$. Pour que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ il faut alors que :

$$\mathrm{x}_D + 2 = 3 \text{ donc } x_D = 1 \text{ et } y_D - 5 = 2 \text{ donc } y_D = 7.$$

Les coordonnées de D sont donc (1 ;7). L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ entraîne que ABCD est un parallélogramme. De plus on sait par la question 2) que ABCD possède un angle droit, ABCD est alors un rectangle.

4)On applique la formule de calcul des coordonnées du milieu d'un segment :

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

Ainsi K a pour coordonnées (1,5 ;3).

5) CBMK est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MK}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ sont (3 ;2), celles de $\overrightarrow{MK}$ sont $(1,5 - x_M; 3 - y_M)$, pour que ces deux vecteurs soient égaux il faut donc que :

$$1,5 - x_M = 3 \text{ et } 3 - y_M = 2$$

On en déduit que M a pour coordonnées (-1,5 ;1), ce que l'on peut facilement vérifier sur le dessin.

6) La figure permet de supposer que AKBM est un losange. On peut le montrer de plusieurs façons différentes.

K étant le milieu de [AC] on sait que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KC}$ qui est égal à $\overrightarrow{MB}$ car CBMK est un parallélogramme. Ainsi $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{MB}$ donc AMBK est un parallélogramme.

ABCD étant un rectangle K est également le milieu de [BD] et AC=BD. Ainsi AK=$\frac{1}{2}$AC=$\frac{1}{2}$BD=BK. Donc AK=BK donc ABMK est un losange.

Exercice 5

1) Le point D n'appartient pas au plan (HIJ).

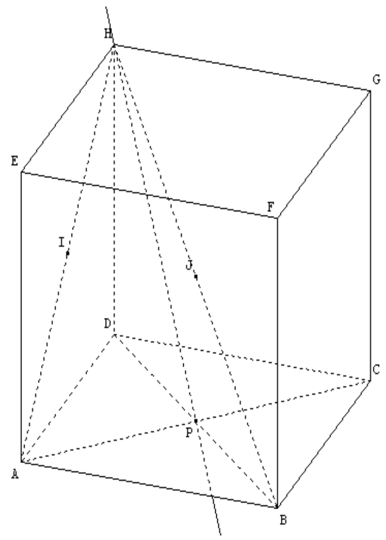
2)a) On se place dans le triangle HAB, I est le milieu de [HA], J milieu de [HB] donc d'après le théorème de la droite des milieux (ou la réciproque du théorème de Thalès) les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

b) ABCD est un carré donc (AB) et (CD) sont parallèles. Comme (IJ) est parallèle à (AB) alors (IJ) est parallèle à (DC).

c) (IJ) est parallèle à (DC) qui est contenue dans les plan (HDG). (IJ) est donc parallèle au plan (HDG).

3)a) Le point H est un point commun aux plans (HAC) et (HBD), il appartient donc à l'intersection de ces deux plans.

b)[AC] et [BD] sont les deux diagonales du carré ABCD, elles se coupent dont en un point que l'on appelera P. Ce point appartient par définition à la droite (AC) qui est incluse dans (HAC) par conséquent P appartient au plan (HAC). De même P appartient à la droite (BD) qui est incluse dans le plan (HBD), donc P appartient à ce même plan. Ainsi P appartient aux plans (HAC) et (HBD)



c)L'intersection de ces deux plans est donc la droite (HP)

Bonus

1) Soit x le nombre de personnes ayant fini devant Jeanne. On sait alors que le nombre de personnes ayant fini après Jeanne est $3x$. Donc en tout $x + 3x + 1$(Jeanne)=2009, donc $4x = 2008$ et par conséquent $x = 502$. Il y a donc 502 personnes devant Jeanne qui est donc 503ème. La réponse était alors A).

2)Si $3\Delta 5 = 2\Delta x$ alors $3 \times 5 + 3 + 5 = 2x + 2 + x$, donc $3x = 21$ d'où $x = 7$. La réponse correcte était donc E).