Seconde - DEVOIR COMMUN DE MATHEMATIQUES N°2 - 19 mai 2010 durée : 2h

Exercice 1 : QCM

Dans chaque cas, une seule réponse est exacte, laquelle ? Ecrire sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. L'équation $(x-1)^2 = 3$ admet :

a) une solution b) deux solutions c) zéro solution.

2. Pour tout nombre réel a, si $a \leq -2$, alors :

a) $a^2 \leq 4$ b) $a^2 \geq 4$ c) $a^2 \leq -4$

3. Pour tout nombre réel a, si $-2 \leq a \leq 5$, alors :

a) $0 \leq a^2 \leq 25$ b) $4 \leq a^2 \leq 25$ c) $-25 \leq a^2 \leq -4$

4. Pour tout nombre réel x, si $-1 < x < 0$, alors :

a) $\frac{1}{x} < -10$ b) $\frac{1}{x} < -1$ c) $\frac{1}{x} > 1$

5. Pour tout nombre réel x, si $0 < x < 4$, alors :

a) $\frac{1}{x} > 0,25$ b) $\frac{1}{x} < 0$ c) $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).

Placer les points $A(2;-3)$, $B(6;-2)$ et $C(5;3)$. La figure sera complétée au fur et à mesure.

1. Placer les points D, E et F vérifiant :

- $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.
- E est le milieu de $[BC]$.
- B est le milieu de $[AF]$.

2. Calculer les coordonnées des points D, E et F.

3. Si les coordonnées n'ont pas pu être calculées précédemment, il est possible de les lire sur le graphique pour traiter cette question.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$.

b) Que peut-on en déduire pour les points D, E et F ?

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les droites Δ et Δ' d'équations respectives : $y = -2x - 3$ et $y = \frac{1}{2}x + 2$.

1. a) Montrer que les droites Δ et Δ' sont sécantes et déterminer, par le calcul, les coordonnées de leur point d'intersection.

b) Tracer Δ et Δ'.

2. a) Montrer que le point B (1 ; –5) appartient à Δ.

b) Déterminer l'équation de la parallèle à la droite Δ' passant par B et tracer cette droite que l'on notera D_1.

3. a) Déterminer une équation de la droite D_2 passant par les points E (4 ; 4) et F (6 ; 0).

b) Que dire des droites D_2 et Δ ? Justifier.

Exercice 4

En août 2009, dans les bars de Bordeaux, on a relevé le prix d'un café (en euros).

Prix d'un café	1	1,1	1,3	1,4	1,5	1,8	1,9
effectifs	1	2	14	2	6	1	1

1. Quelle est l'étendue de la série ?

2. Déterminer le prix moyen d'un café.

3. Déterminer la médiane et les quartiles de la série, en justifiant les calculs de la médiane et du premier quartile.

4. Recopier et compléter les phrases suivantes :

a) Au moins 50% des prix pratiqués sont supérieurs ou égaux à...

b) Au moins 75% des prix pratiqués sont inférieurs ou égaux à ...

Exercice 5

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$.

1. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 4$.

3. a) Donner le tableau de signes de l'expression $(x - 1)(x - 3)$.

b) Démontrer que l'inéquation $f(x) \geq 4{,}5$ est équivalente à $(x-2)^2 \geq 1$.

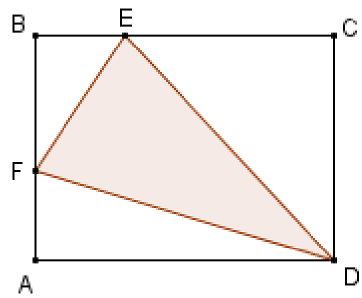
c) Déduire des deux questions précédentes, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 4{,}5$.

Partie B

ABCD est un rectangle tel que AB = 3 et AD = 4.

Le point E appartient à [BC], le point F appartient à [AB] et les points E et F sont tels que BE = AF.

On pose x = BE = AF.



1. a) Exprimer en fonction de x l'aire de chacun des triangles AFD, BEF et ECD.

b) En déduire que la somme des aires de ces trois triangles est :

$S(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

c) Calculer en fonction de x l'aire $A(x)$ du triangle EFD puis montrer que pour tout x de l'intervalle $[0 ; 3]$,

$A(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie à la partie A.

2. En utilisant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes :

a) Pour quelle position du point E sur le segment [BC] l'aire du triangle EFD est-elle égale à 4 ?

b) Pour quelles valeurs de x dans l'intervalle $[0 ; 3]$ l'aire du triangle EFD est-elle supérieure ou égale à 4,5 ?

Question Bonus

```
Entrée
Saisir n : entier naturel non nul
Traitement
Tant que n ≠ 1
  Si n pair alors
      n prend la valeur n/2
      sinon
      n prend la valeur 3n + 1
  FinSi
  Afficher n
FinTantque
```

Les nombres calculés à partir de n avec cet algorithme, forment la suite de Syracuse de n.

Quelle suite de nombres donne cet algorithme pour $n = 6$?

De cet algorithme de calcul est née l'une des plus célèbres conjectures mathématiques, connue sous le nom de Syracuse (université de Syracuse USA) : il semble que pour tout entier naturel non nul choisi, la répétition de ce programme de calcul conduit à 1 après un nombre fini d'étapes.