CORRIGE DU DEVOIR COMMUN DE MATHEMATIQUES 2^{nde}

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Exercice n°1

1/ $A = \dfrac{\dfrac{2}{14}+\dfrac{21}{14}}{\dfrac{6}{6}-\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\dfrac{23}{14}}{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{23}{14}\times\dfrac{6}{1} = \dfrac{23\times2\times3}{7\times2} = \dfrac{69}{7} \approx 9{,}86.$

2/ $B = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6}-1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\times1\times\sqrt{6} + 1^2$
$= 2 + 2\sqrt{6} + 3 + 6 - 2\sqrt{6} + 1 = 12$; B est un nombre entier.

$C = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$
$= \dfrac{5+2\sqrt{5}\sqrt{3}+3}{5-3} + \dfrac{5-2\sqrt{5}\sqrt{3}+3}{5-3} = \dfrac{16}{2} = 8.$ C est un nombre entier.

3/ $108 = 2^2\times3^3$; $125 = 5^3$; $90 = 2\times3^2\times5$. $D = \dfrac{(2^2\times3^3)^{-5}\times(5^3)^{20}}{(2\times3^2\times5)^{30}} = \dfrac{2^{-10}\times3^{-15}\times5^{60}}{2^{30}\times3^{60}\times5^{30}} = 2^{-40}\times3^{-75}\times5^{30}.$

4/ Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $A = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$S = \dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}+\dfrac{1}{5\times6} = (\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}) + (\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}) + (\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}) + (\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}) = 1-\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}.$

5/ a. $I\cap J =]3\,;5]$ $I\cup J = [-2\,;8[$ $I\cap K = \varnothing$.

b. $1{,}7 \in [-3\,;\sqrt{3}]$ $0 \in]-\infty\,;0]$ $7 \in [2\,;7[\,\cup\,[3\,;16[$

$-5 \notin]-4\,;2]\cap]-5\,;8]$ $\dfrac{69}{7}\notin\mathbb{D}$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice n°2

1/ $f(x) = (3x-1)^2 - 4(x-2)^2 = (9x^2-6x+1) - 4(x^2-4x+4) = 9x^2-6x+1-4x^2+16x-16 = 5x^2+10x-15.$
$g(x) = (x-1)^2 - (2x-1)(3x-3) = x^2-2x+1-(6x^2-6x-3x+3) = x^2-2x+1-6x^2+6x+3x-3 = -5x^2+7x-2.$

2/ $f(x) = (3x-1)^2 - 4(x-2)^2 = (3x-1)^2 - [2(x-2)]^2 = [(3x-1)-2(x-2)]\,[(3x-1)+2(x-2)]$
$= [3x-1-2x+4]\,[3x-1+2x-4] = (x+3)(5x-5) = 5(x+3)(x-1).$
$g(x) = (x-1)^2 - 3(2x-1)(x-1) = (x-1)\,[\,(x-1)-3(2x-1)\,] = (x-1)\,[x-1-6x+3] = (x-1)\,(-5x+2)$

3/ $f(0) = -15$, $g(1) = (1-1)\,(-5\times1+2) = 0$; $g(\sqrt{5}) = -5\times\sqrt{5}^{\,2} + 7\sqrt{5} - 2 = -27+7\sqrt{5}$.

4/

① $f(x) = 0$
$\Leftrightarrow 5(x+3)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x+3 = 0$ ou $x-1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 1$

$\mathscr{S} = \{-3\,;1\}$

② $g(x) = -2$
$\Leftrightarrow -5x^2+7x-2 = -2$
$\Leftrightarrow -5x^2+7x = 0$
$\Leftrightarrow x(-5x+7) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-5x+7 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{7}{5}$

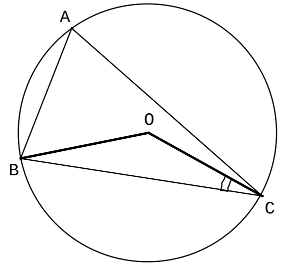
$\mathscr{S} = \{\dfrac{7}{5}\,;0\}$

③ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{5(x+3)(x-1)}{(x-1)(-5x+2)} = 0$ deux valeurs interdites : 1 et $\dfrac{2}{5}$
Or $\dfrac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b \neq 0$.
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\Leftrightarrow 5(x+3)(x-1) = 0$ et $x\neq1$ et $x\neq\dfrac{2}{5}$
$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 1$ et $x\neq1$ et $x\neq\dfrac{2}{5}$
$\mathscr{S} = \{-3\}$

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Exercice n°3

1^{er} cas : $0 < \alpha < 90$



2/ Le triangle OCB est isocèle en O car [OC] et [OB] sont des rayons de ce cercle : on en déduit que les angles à la base, $\widehat{OBC}$ et $\widehat{OCB}$ sont égaux.

On a donc : $\widehat{OCB} = \dfrac{180-\widehat{BOC}}{2}$.

Recherche de $\widehat{BOC}$:

Le triangle $\widehat{BOC}$ est un angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$: sa mesure est donc le double de celle de celle de $\widehat{BAC}$.

On a donc : $\widehat{OCB} = \dfrac{180-2\alpha}{2} = (90-\alpha)°$.

3/ a) OBC équilatéral signifie que tous ses angles sont égaux à 60° et donc on veut :
$90-\alpha = 60$ d'où $\alpha = 30°$.

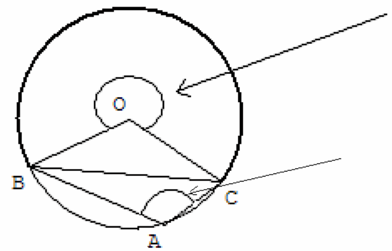
b) On remarque OBC ne peut être rectangle qu'en O car :

Supposons que OBC est rectangle en B, alors comme le triangle OCB est isocèle en O : $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 90°$. On a alors : $\widehat{BOC} = 180-90-90 = 0$ donc $\alpha = 0$ ce qui est exclu par l'énoncé.
OBC est rectangle en B est impossible donc OBC est rectangle en O est la seule possibilité.

OBC rectangle en O signifie : $2\alpha = 90$ donc $\alpha = 45°$.

$2^{\text{ème}}$ cas : $90 \leqslant \alpha < 180$

On aurait pu faire la figure dans le cas suivant : étude du cas où $90 \leqslant \alpha < 180$.



L'angle obtus (angle rentrant) $\widehat{BOC}$ intercepte le grand arc BC.

L'angle $\widehat{BAC} = \alpha$ intercepte le grand arc BC.

On utilise le même théorème que dans le cas où : $0 < \alpha < 90$.

On en déduit que l'angle rentrant $\widehat{BOC}$ vaut 2α :l'angle saillant (l'angle aigu) $\widehat{BOC}$ (celui du triangle BOC) qui nous intéresse mesure alors : $360-2\alpha$.

Dans ce cas, $\widehat{OCB} = \dfrac{180-(360-2\alpha)}{2} = \dfrac{2\alpha-180}{2} = (\alpha-90)°$.

CORRIGE DU DEVOIR COMMUN DE MATHEMATIQUES 2^{nde}

3/ a) OBC équilatéral signifie que tous ses angles sont égaux à 60° et donc on veut :
$\alpha - 90 = 60$ d'où $\alpha = 150°$.

b) On remarque OBC ne peut être rectangle qu'en O (démonstration faite avant)car :
OBC rectangle en O signifie : $360 - 2\alpha = 90$ donc $\alpha = 135°$.

<u>Exercice n°4</u>

1/ • démonstration à l'aide de la symétrie de centre I
Par la symétrie de centre I :
C $\mapsto$ A car I est le milieu de [AC]
B $\mapsto$ D
donc [CB] $\mapsto$ [AD]
Une symétrie conserve le milieu : J est le milieu de [BC] donc l'image de J est le milieu de l'image de [BC].
On en déduit que K est le milieu de [AD].

• démonstration à l'aide du théorème de milieux :
Montrons tout d'abord que K appartient au segment [AB] (on ne demandait pas de le prouver).
➢ ADCB est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu I. On en déduit : (AD) // (BC).
➢ de même KDJB est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu I.
On en déduit : (KD) // (BJ). Comme B, J et C sont alignés : (KD) // (BC).
➢ (AD) // (BC) et (KD) // (BC) donc (KD) // (AD); K est en commun donc K appartient au segment [AD].

Montrons que K est le milieu de [AD].
Montrons tout d'abord que (KI) est parallèle à (DC) :
Dans le triangle ABC, la droite (JI) qui relie le milieu du côté [BC] au milieu du côté [AC] est parallèle au côté [AB].
On a vu au dessus que ABCD est un parallélogramme donc (IJ) est parallèle à (AB) et à (DC).
Dans le triangle ADC, I est le milieu de [AC], (KI) est parallèle à (DC).
La droite qui passe par le milieu de [AC] et qui est parallèle au côté [DC] coupe le troisième côté [AD] en son milieu. Ce point d'intersection est K donc K est le milieu de [AD].

2/ Dans le triangle ABD : (BK) est la médiane issue de B, (AI) est la médiane issue de A. Elles se coupent en E donc E est le centre de gravité de ABD. (DE) passe par E donc c'est la troisième médiane : elle coupe donc [AB] en son milieu de L.