Énigme n° 1 : Jeux de mains

Une soirée réunit 13 couples. Après le dîner, l'une des convives s'ennuie et demande aux 25 autres personnes combien elles ont serré de mains à leur arrivée. Elle obtient 25 réponses différentes. Quelle a donc été la réponse de son mari ?
Bien sûr, personne ne serre plus d'une fois la main de ses amis et personne ne serre sa propre main ni celle de son conjoint.

Solution :

Il y a 26 personnes, chacune a donc donné 24 poignées de mains au plus, car elle n'a serré ni la main de son conjoint, ni la sienne.

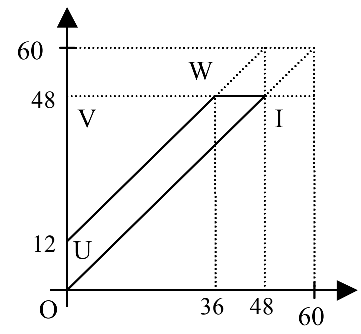
Les 25 réponses différentes que la dame a pu obtenir sont donc les nombres de 0 à 24.
Soit P_i la personne ayant serré i mains et P la dame en question. P_{24} a serré les mains de tout le monde, sauf de P_0 ; P_0 et P_{24} sont donc mari et femme.

P_1 n'a serré qu'une seule main, celle de P_{24}. P_{23} a serré toutes les mains sauf celles de 2 convives : P_0 et P_1. Son conjoint est donc l'un de ces deux convives ; comme P_0 est marié avec P_{24}, P_1 et P_{23} sont mari et femme.
De proche en proche, on démontre ainsi que P_j et P_{24-j} sont mari et femme et ce, jusqu'à P_{11} et P_{13}.
Reste alors P_{12} qui ne peut être que l'époux de P. **La solution est donc 12.**
Il est alors facile de voir que la dame P a également donné 12 poignées de main.

APMEP – Journées de Pau 2003 Extrait de : Mathématiques de compétition 7-2

Énigme n° 2 : Art d'amants

Roméo et Juliette se rendent aléatoirement, à partir de 12 heures, au musée.
Chacun d'eux y reste douze minutes puis, repart à 13 heures au plus tard.
Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?



Solution :

Soit x (resp. y) le temps, exprimé en minutes, écoulé entre 12h00 et l'arrivée de la 1[re] personne (resp. la 2[e]).
Il faut : $0 \le x \le 48$, $0 \le y \le 48$ et $x \le y$.
La rencontre aura lieu si et seulement si : $y \le x + 12$.

Sa probabilité est donc : $\dfrac{\textbf{aire de OUWI}}{\textbf{aire de OVI}} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{16}}$.

APMEP – Journées de Pau 2003 Extrait de : Bulletin Réciproques n°8 – mars 1999

Énigme n° 3 : Le concierge est dans l'ascenseur

Dans cet immeuble de onze étages, l'ascenseur est bien capricieux : il ne peut monter que 2, 3 ou 5 étages à la fois et ne peut descendre que de 4 ou 11 étages.

Le concierge, dont la loge est située au rez-de-chaussée, doit procéder à la distribution du courrier.

Comment doit-il opérer pour partir de sa loge, s'arrêter une fois et une seule à chaque étage, et revenir chez lui ?
Sauriez-vous déterminer le nombre de cheminements différents possibles ?

Solution :

On fait un arbre des possibilités et on procède par élimination.
Il y a 6 solutions possibles :

0-2-4-7-9-5-1-3-8-10-6-11-0	0-2-4-7-10-6-9-5-1-3-8-11-0	0-2-5-1-3-8-4-7-10-6-9-11-0
0-2-5-1-4-7-3-8-10-6-9-11-0	0-3-8-10-6-2-5-1-4-7-9-11-0	0-5-1-3-8-10-6-2-4-7-9-11-0

Le problème peut être représenté par un graphe (fig. 1) dans lequel on a dessiné la première solution (fig. 2).

Il s'agit d'un problème de recherche de cycle hamiltonien : trouver un chemin qui parte du sommet 0, qui passe par tous les sommets une fois et une seule, et qui revienne au sommet 0.

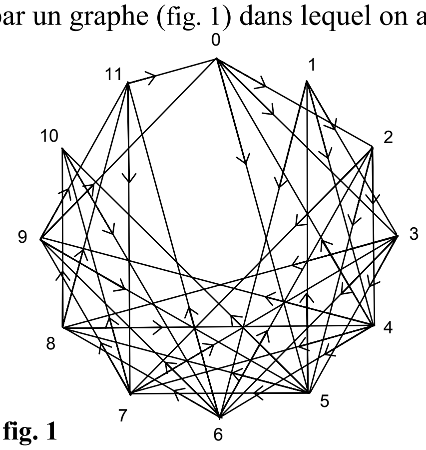


fig. 1

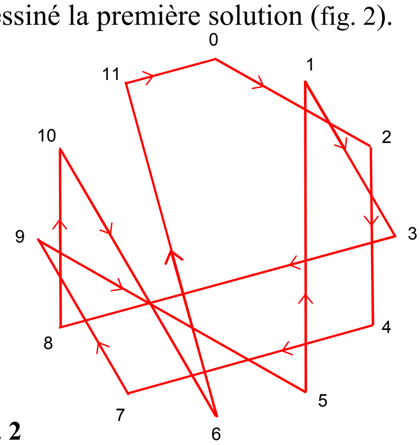


fig. 2

APMEP – Journées de Pau 2003
Extrait de : 100 jeux mathématiques du monde n°2 – p 102

Énigme n° 4 : Quel coffre !

Le numéro de code du coffre du capitaine Mémo est le plus petit nombre entier N tel que si on écrit 1 à gauche et à droite des chiffres de N, le nombre ainsi obtenu est égal à 99 × N.

1 ???... ???1=99 × ???... ???

Quel est ce numéro ?

Solution :

Nous avons N + $\overline{1N1}$ = 100 N. Posons cette addition :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \hline = & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{array}$$

Commençons à droite : le chiffre des unités de N ne peut être que 9.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & 9 \\ + & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & 9 & 1 \\ \hline = & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & 9 & 0 & 0 \end{array}$$

Poursuivons de droite à gauche ; pour chaque rang, il n'y a qu'une possibilité. À chaque étape, nous vérifions s'il est possible ou non de terminer l'addition en ajoutant un 1 à gauche du nombre de la deuxième ligne.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & 0 & 9 \\ + & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & 0 & 9 & 1 \\ \hline = & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & 0 & 9 & 0 & 0 \end{array}$$

Comme nous le constatons ci-dessous, l'addition peut s'arrêter lorsqu'on a écrit 21 chiffres.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} & & & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 5 & 5 & 0 & 5 & 6 & 1 & 7 & 9 & 7 & 7 & 5 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ + & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 5 & 5 & 0 & 5 & 6 & 1 & 7 & 9 & 7 & 7 & 5 & 2 & 8 & 0 & 9 & 1 \\ \hline = & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 5 & 5 & 0 & 5 & 6 & 1 & 7 & 9 & 7 & 7 & 5 & 2 & 8 & 0 & 9 & 0 & 0 \end{array}$$

Le code est donc : 112 359 550 561 797 752 809 .

APMEP – Journées de Pau 2003 Extrait de : 50 énigmes mathématiques – n° 40

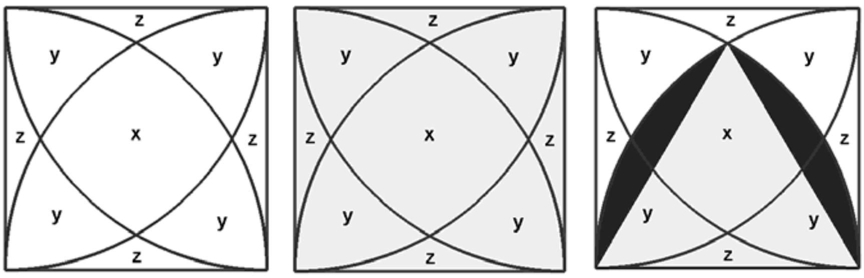
Énigme n° 5 : Tapis gris

Un tapis carré de un mètre de côté est décoré d'un motif constitué à partir de quarts de cercle.

Quelle est l'aire de la partie grisée ?

Solution :

$x + 3y + 2z = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $x + 4y + 4z = 1$



L'aire d'un segment circulaire est égale à $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. (secteur – triangle équilatéral)

Donc $x + 2y + z = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

La résolution de ce système donne :

$$x = \frac{\pi}{3} + \mathbf{1} - \sqrt{3} \approx \mathbf{0{,}315}.$$

APMEP – Journées de Pau 2003

Énigme n° 6 : Le saucisson numérisé

Un charcutier vient de découvrir sur un emballage un nombre gigantesque (près de 50 chiffres). Ne sachant qu'en faire, il décide de le saucissonner en tranches de 2 chiffres en partant de la droite. Puis il additionne toutes les « tranches ».
Par exemple si le nombre se termine par …367523, il pose 23 + 75 + 36 +…
La somme de tous ces nombres vaut 2003.

Le lendemain, le fils du charcutier tombe sur le même nombre. Il lui applique une technique différente : il écrit le premier chiffre en partant de la droite, retranche le second, ajoute le troisième, enlève le quatrième,… jusqu'au dernier. Sur l'exemple précédent cela donnerait : 3 – 2 +5 – 7 + 6 – 3…
Le résultat est un nombre positif formé d'un seul chiffre. Lequel ?

Solution :

Nous raisonnons sur le reste de la division euclidienne par 11 du nombre gigantesque que nous appellerons N.
Comme $10^2 \equiv 1$ (modulo 11), nous avons donc $10^{2n} \equiv 1$ (mod 11)
Ainsi, si N = $\overline{\cdots fedcba}$ c'est-à-dire N = $\overline{ba} + \overline{dc} \times 10^2 + \overline{fe} \times 10^4 + \cdots$, nous aurons
N ≡ $\overline{ba} + \overline{dc} + \overline{fe} + \cdots$ (mod 11), donc N ≡ 2003 (mod 11).
Or, 2003 est congru à 1 modulo 11 et en conséquence nous obtenons N ≡ 1 (mod 11).
Par ailleurs, il est connu que la deuxième somme effectuée par le fils du charcutier est congrue à N modulo 11 (grâce à $10^n \equiv (-1)^n$ (mod 11)).

Comme le résultat n'a qu'un chiffre, c'est le reste lui-même, donc 1.

APMEP – Journées de Pau 2003