

BIEN SOUS TOUS RAPPORTS

Objectif

Interpréter les représentations graphiques de fonctions numériques.

Associer les propriétés d'une fonction rationnelle à celles des fonctions polynômes qui la composent.

Outils

Notions générales sur les fonctions numériques.

Fonctions de référence : polynômes et fonctions rationnelles.



Une fonction est le quotient d'une fonction affine par une fonction du second degré dont on connaît les courbes représentatives.

On se propose de déterminer quelques propriétés de cette fonction et de sa courbe représentative à partir des courbes données.

On s'intéresse également au problème réciproque.



Dans le plan rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère :

- la droite \mathcal{D} d'équation $y = mx + p$ (où m et p sont des nombres réels non tous deux nuls) ;
- la parabole \mathcal{P} d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (où a, b, c sont des nombres réels, a non nul).

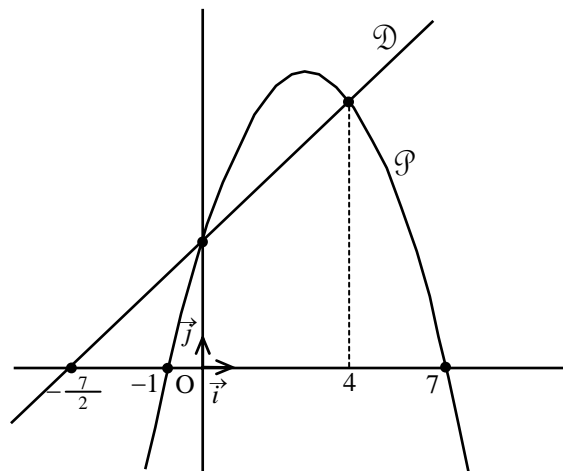
On leur associe la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$,

et sa courbe représentative \mathcal{C} .

On se propose de déterminer quelques propriétés de la fonction f et de la courbe \mathcal{C} à partir des données relatives à la droite \mathcal{D} et à la parabole \mathcal{P} , et réciproquement de retrouver des propriétés de \mathcal{D} et de \mathcal{P} connaissant \mathcal{C} .

A. Premiers indices

1. À partir des seuls éléments indiqués sur le graphique ci-contre, où ont été représentées la droite \mathcal{D} et la parabole \mathcal{P} , déterminer :
 - l'ensemble de définition de la fonction f ;
 - les solutions de l'équation $f(x) = 0$;
 - les solutions de l'équation $f(x) = 1$;
 - le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
2. Interpréter graphiquement pour la courbe \mathcal{C} les résultats trouvés.



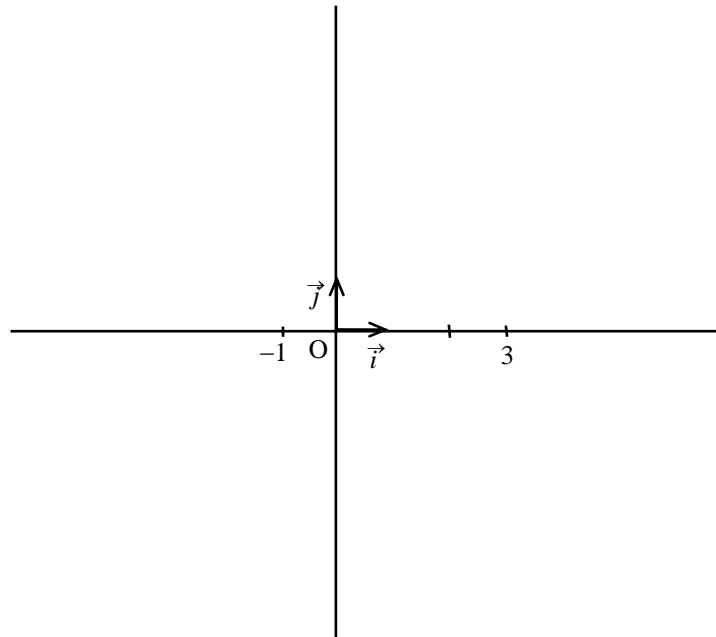
FACULTATIF

On pourra ici expliciter la fonction f en déterminant une équation de la parabole \mathcal{P} et une équation de la droite \mathcal{D} à l'aide du seul paramètre a .

B. Ébauche

Réaliser un graphique représentant une droite \mathcal{D} et une parabole \mathcal{P} sachant que la courbe \mathcal{C} associée vérifie à la fois :

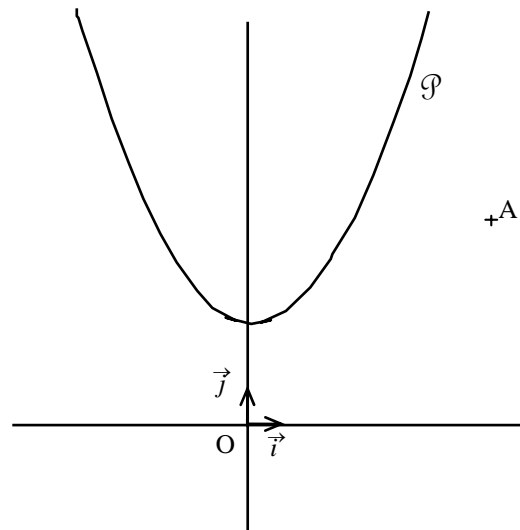
- \mathcal{C} n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe des ordonnées ;
- \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3 ;
- la droite d'équation $y = 1$ coupe \mathcal{C} en un seul point d'abscisse -1 ;
- \mathcal{C} est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $] - \infty ; 3 [$.



C. Cas de symétrie

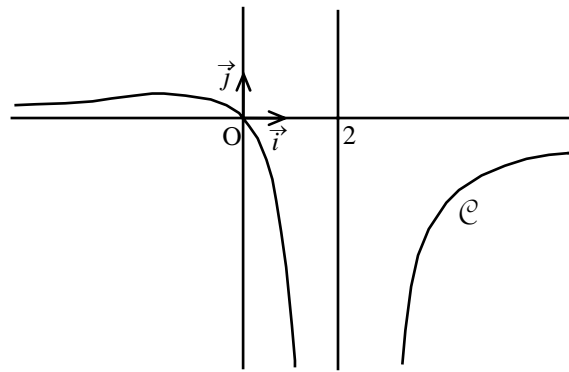
Sachant que la parabole \mathcal{P} a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, et que la droite \mathcal{D} passe par le point A, tracer cette droite \mathcal{D} en sorte que :

1. la fonction associée soit paire ;
2. la fonction associée soit impaire.



D. Termes du rapport

- Démontrer que toutes les courbes \mathcal{C} admettent pour asymptote la droite d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
- À partir des seuls éléments indiqués sur le graphique ci-contre où ont été représentées la courbe \mathcal{C} et ses asymptotes d'équations respectives $x = 2$ et $y = 0$, donner :
 - l'ensemble de définition de la fonction f ;
 - les solutions de l'équation $f(x) = 0$;
 - les solutions de l'équation $f(x) = 1$;
 - le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .



- Lequel des schémas ci-dessous pourrait représenter la droite \mathcal{D} et la parabole \mathcal{P} correspondant à la courbe \mathcal{C} ? Donner des arguments permettant d'éliminer les autres.

Réaliser un autre schéma plausible.

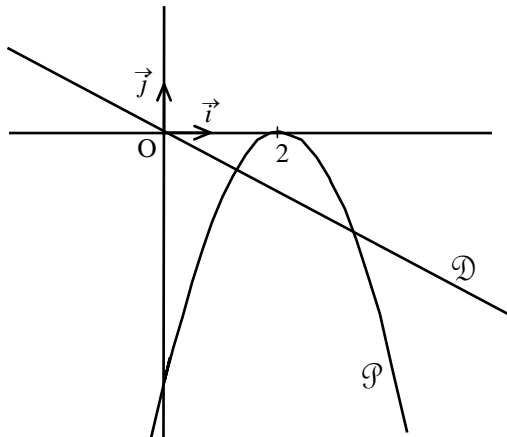


SCHÉMA A

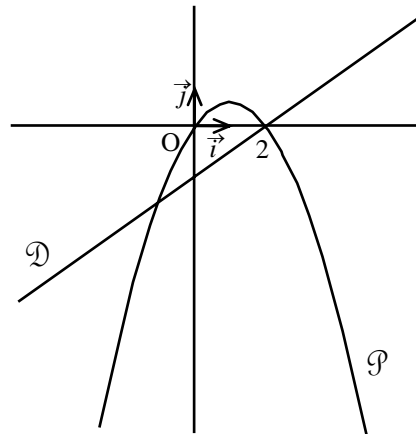


SCHÉMA B

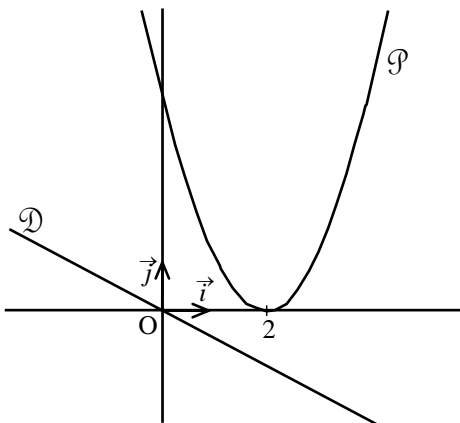


SCHÉMA C

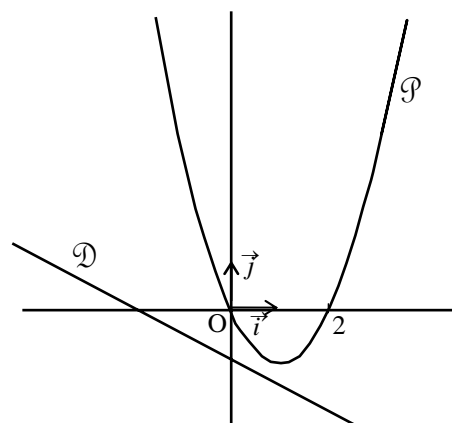
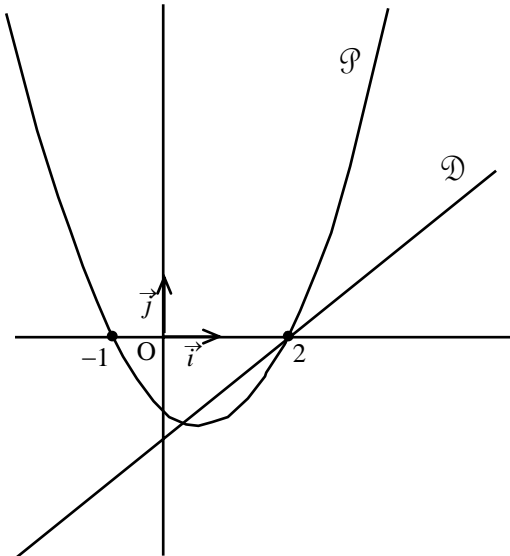
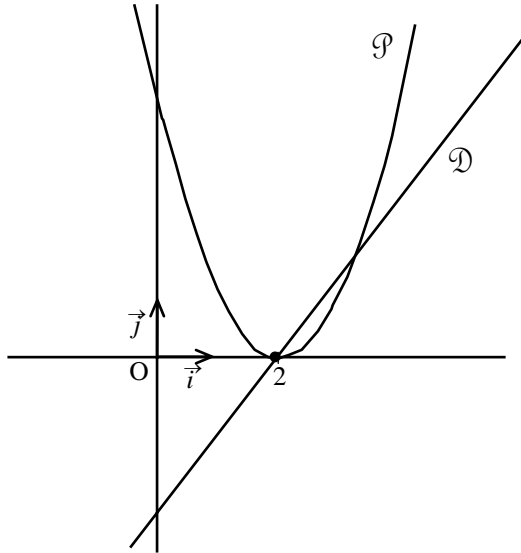


SCHÉMA D

E. Sujet d'étude : solution de facilité

Sur chacun des graphiques ci-dessous ont été représentées une droite \mathcal{D} et une parabole \mathcal{P} .

On se propose de déterminer, pour chacun d'eux, et à partir des seuls éléments indiqués sur le dessin, la forme de la fonction f et l'allure de la courbe \mathcal{C} qui leur sont associées.



On rappelle que si \mathcal{D} et \mathcal{P} ont pour équations respectives $y = mx + p$ et $y = ax^2 + bx + c$, la fonction f est définie par $f(x) = \frac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$.

1. Donner une équation de la droite \mathcal{D} à l'aide du seul paramètre m .
2. Donner une équation de la parabole \mathcal{P} à l'aide du seul paramètre a .
3. En déduire l'expression de $f(x)$, puis la nature de \mathcal{C} .
4. Quel est le signe du quotient $\frac{m}{a}$?
5. Donner l'allure de la courbe \mathcal{C} .