PRODUIT À SOMME DE CARRÉS CONSTANTE

Objectif	*Étudier les variations d'une fonction numérique par transposition dans un cadre géométrique.*
Outils	*Premières définitions relatives aux fonctions numériques : monotonie sur un intervalle, extremum.*

On se propose d'étudier comment varie le produit de deux nombres réels positifs dont la somme des carrés est constante.

Soit deux nombres réels positifs a et b dont la somme des carrés a^2+b^2 est égale au nombre réel strictement positif k^2 (où k est strictement positif).

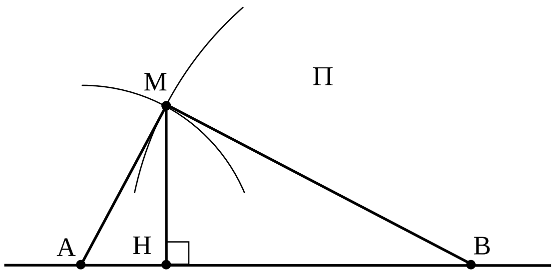
En fonction de a, le produit ab s'écrit donc $a\sqrt{k^2-a^2}$.

Le problème consiste à étudier les variations de la fonction φ définie sur $[\,0\,;k\,]$ par : $\varphi(a)=a\sqrt{k^2-a^2}$

A. Modélisation géométrique

Soit un segment $[\mathrm{AB}]$ de longueur k et Π l'un des demi-plans de frontière (AB) ;

Soit M le point d'intersection, situé dans Π, du cercle de centre A et de rayon a, avec le cercle de centre B et de rayon b.



1. a. Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.

   Tracer le demi-cercle (Γ) de diamètre $[\mathrm{AB}]$ situé dans Π.

   b. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

   Démontrer que $\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}=\mathrm{AB}\times\mathrm{MH}$.

   D'où la traduction de φ en termes géométriques : $\varphi : \mathrm{AM}\mapsto k\times\mathrm{MH}$.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{\imath};\vec{\jmath})$ on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction φ.

   En prenant pour unité $10\ \mathrm{cm}$ et pour valeur de $k : 1$, montrer que les résultats établis dans la question précédente permettent de tracer point par point la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide d'un compas.

   Placer une dizaine de points appartenant à la courbe $\mathcal{C}$.

B. Existence d’un maximum

1. Observer que MH admet une valeur maximale pour une position de M que l’on précisera.

2. En déduire que la fonction φ admet un maximum pour une valeur de a que l’on précisera.

C. Variations du produit

1. M décrivant le demi-cercle (Γ) de A vers B, examiner les variations de MH, et en déduire les variations de $k \times \mathrm{MH}$.

2. Dresser le tableau des variations de la fonction φ sur l’intervalle $[\,0\,;\,k\,]$.