

LA VOITURE INSUFFISANTE

Objectif	<i>Optimaliser à l'aide de graphiques</i>
Outils	<i>Fonctions affines et leurs représentations graphiques Homothéties.</i>



Voulant partir déjeuner, à bord de deux voitures, dans une auberge de campagne, neuf amis voient leur projet compromis par la panne de l'un des véhicules. La matinée étant avancée et l'espoir de trouver un garagiste bien mince, décision est prise de n'utiliser qu'un véhicule. Les amis se répartissent en deux groupes, la voiture amène le premier à destination puis revient chercher l'autre qui, pour ne pas perdre de temps, aura commencé le trajet à pied.

Cette stratégie est-elle la meilleure pour que les amis soient réunis le plus tôt possible à l'auberge ? C'est la question à laquelle on va répondre.



La distance restant à parcourir est de 26 km. Les marcheurs avancent à 4 km/h et la voiture ne fait en moyenne que 36 km/h car le parcours est accidenté.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal : on porte le temps en abscisses (1 cm pour 5 min) et les distances en ordonnées (1 cm pour 2 km ; on prendra la feuille dans le sens de la longueur). On appelle « diagramme du mouvement de la voiture » la courbe représentant la fonction d qui, à tout instant t , fait correspondre la distance entre le point de la panne et la voiture.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = 26$.

A. Stratégie adoptée par le groupe

- La voiture amène le premier groupe à destination tandis que le deuxième groupe part à pied.
 - Quelle est la nature du diagramme du mouvement de la voiture entre l'instant du départ (instant 0) et l'instant où le premier groupe arrive à destination ? Tracer ce diagramme. Soit A le point du diagramme correspondant à l'arrivée du premier groupe à l'auberge. Quelles sont les coordonnées de A ? Au bout de combien de temps le premier groupe arrive-t-il à destination ?
 - Donner l'équation réduite du diagramme du mouvement du groupe de marcheurs. Déterminer graphiquement, puis par le calcul, la distance séparant le deuxième groupe du point de départ au moment où la voiture dépose le premier groupe à l'auberge. Soit B le point correspondant sur le graphique.
- La voiture rebrousse chemin pour aller récupérer le groupe de marcheurs. Donner l'équation réduite du diagramme du mouvement de la voiture.
 - Soit C le point du graphique correspondant à l'instant de la rencontre. Déterminer graphiquement, puis par le calcul, les coordonnées de C. Quel est l'instant de la rencontre ? À quelle distance du point de départ a-t-elle lieu ?
- La voiture embarque les piétons et repart vers l'auberge. Donner l'équation réduite de cette phase du mouvement.

Déterminer graphiquement, puis par le calcul, l'instant de l'arrivée.

Soit D le point correspondant du graphique. Que dire des droites (OA) et (CD) ? Justifier.

B. Une meilleure stratégie

Quand tous sont réunis à l'auberge, Sophie, qui trouve avoir beaucoup marché, déclare : « Il est injuste qu'un seul groupe ait fait de la marche. J'aurais préféré que l'on partage le temps de marche : nous serions sans doute passés à table plus tôt. »

1. Soit E le point tel que AOCE soit un parallélogramme. La droite (OE) coupe (Δ) en F.

L'homothétie de centre O qui transforme E en F transforme A en A' et C en C'.

- Démontrer que la ligne brisée OA'C'F est un diagramme possible du mouvement de la voiture et que les segments [A'F] et [OC'] sont des diagrammes de mouvement possibles pour les marcheurs.
- Dans cette solution, les deux groupes sont toujours en mouvement (ils marchent ou sont transportés) et ils arrivent en même temps.

Déterminer graphiquement l'instant d'arrivée et la distance parcourue par chaque groupe à pied et en voiture.

2. Quelques kilomètres avant l'auberge, la voiture laisse le premier groupe achever le chemin à pied et revient chercher les marcheurs pour les conduire à destination.

Soit A'' le point du diagramme correspondant au premier arrêt de la voiture.

- Placer A'' en A₁, point quelconque du segment [A'A].

Construire les diagrammes des mouvements des deux groupes. On notera C₁ le point du diagramme correspondant à la rencontre de la voiture avec le deuxième groupe, F₁ et F'₁ les points correspondant aux arrivées des deux groupes.

Construire le point E₁ tel que OA₁E₁C₁ soit un parallélogramme.

Démontrer que O, F₁ et E₁ sont alignés (on pourra considérer l'homothétie de centre O transformant A₁ en A').

Constater graphiquement que le choix de A₁ en A' est celui qui permet aux amis d'être réunis le plus tôt possible à l'auberge.

- Mener la même démarche en plaçant le point A'' en A₂, point quelconque du segment [OA'].

Conclure.

Dans l'hypothèse où la voiture repart chercher les marcheurs, constater graphiquement que le repas n'aura lieu plus tôt que dans le cas d'une arrivée groupée des amis.