À SAUTE FONCTION

Objectif	*Examiner des fonctions discontinues en certains réels et critiquer les représentations graphiques inexactes fournies par les calculatrices graphiques.* *Étudier la continuité en un réel de la somme, du produit, de la composée de deux fonctions, suivant que chacune d'elles est, ou non, continue.*
Outils	*Limite en un réel. Limite à droite et à gauche.* *Définition de la continuité en un réel a sous la forme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.* *Continuité de la somme, du produit, de la composée, de deux fonctions continues.* *Dans cette séquence, la définition et les théorèmes sont rappelés.*

Une fonction f est continue en a si f admet $f(a)$ pour limite en a. Si deux fonctions sont continues en un point, leur somme, leur produit, est aussi continu en ce point. De même, si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors la composée de f suivie de g est continue en a. Mais que conclure si l'une des fonctions de départ n'est pas continue "là où il le faut" ?

L'étude de quelques fonctions bâties à partir de la fonction « partie entière » va tenter d'apporter des éléments de réponse.

A. La fonction « partie entière »

On appelle fonction « partie entière », et on note E, la fonction qui, à tout nombre réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. a. Donner la valeur des expressions suivantes :

E(0)	E(0,5)	E(0,999 9)	E(1)	E(1,5)	E(1,999 999)	E(2)
E(–5,1)	E(–5)	E(–1,000 1)	E(–1)	E(–0,999)	E(–0,5)	E(–0,000 001)

   b. Tracer la courbe représentative de la fonction E.

2. Étudier la continuité de la fonction E en tout réel a.

3. Faire tracer par la calculatrice graphique la courbe représentative de la fonction E.
   Ce tracé est-il correct ? Le cas échéant, expliquer d'où vient l'erreur commise par la calculatrice.

B. Continuité en un réel d'une somme de fonctions

Soit a un nombre réel. On rappelle que, si les fonctions f et g sont définies et continues en a, alors la fonction somme $f+g$ est continue en a. f ou g étant discontinue en a, peut-on conclure sur $f+g$?

1er cas : f est continue en a et g discontinue en a

a. Exemple. Soit $f : x \mapsto x$; $g : x \mapsto -\mathrm{E}(x)$; alors $f+g : x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$. Tracer la courbe représentative de $f+g$ dans un repère du plan. En quels réels $f+g$ semble-t-elle être discontinue ? (on ne demande pas de démonstration).

b. Résultat général. Soit f et g deux fonctions définies en un réel a. En raisonnant par l'absurde, démontrer que, si f est continue en a et si g est discontinue en a, alors $f+g$ est discontinue en a.

2^e^ cas : f et g sont discontinues en a.

a. Soit n un entier naturel non nul et φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^n$. Démontrer que φ est continue sur $\mathbf{R}$.

b. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\psi(x) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(1 - x)$.

Démontrer que ψ est discontinue en tout entier relatif et esquisser la courbe représentative de ψ dans un repère. Faire afficher la courbe représentative de ψ sur l'écran de la calculatrice et critiquer cette représentation graphique.

c. Démontrer, en donnant des exemples, que, si f et g sont discontinues en a, $f + g$ peut être soit continue, soit discontinue en a.

C. Continuité en un réel d'un produit de fonctions

Soit a un nombre réel. On rappelle que, si les fonctions f et g sont définies et continues en a, alors la fonction produit $f\,.\,g$ est continue en a. De plus, si une fonction f est définie en a, continue en a, et si $f(a)$ n'est pas nul, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en a.

f ou g étant discontinue en a, peut-on conclure sur $f.g$?

1^er^ cas : f est continue en a, avec $f(a) \neq 0$, et g est discontinue en a.

Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $f.g$ est discontinue en a.

2^e^ cas : f est continue en a, avec $f(a) = 0$, et g est discontinue en a

a. Démontrer, en donnant des exemples, que $f.g$ peut être soit continue, soit discontinue en a. (On pourra considérer les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ pour tout réel non nul et $g(0) = 0$.)

b. On suppose que la fonction g est bornée au voisinage de a.

Démontrer alors que $f.g$ est continue en a.

3^e^ cas : f et g sont discontinues en a.

Démontrer que $f.g$ peut être soit continue, soit discontinue en a.

D. Continuité en un réel de la composée de deux fonctions

On considère dans cette partie une fonction f définie sur un intervalle I, une fonction g définie sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$ et un réel a de I.

On rappelle que, si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a.

f étant discontinue en a et / ou g étant discontinue en $f(a)$, peut-on conclure sur $g \circ f$?

1^er^ cas : f est continue en a et g est discontinue en $f(a)$.

Démontrer, en donnant des exemples, que $g \circ f$ peut être soit continue, soit discontinue en a.

2^e^ cas : f est discontinue en a et g est continue en $f(a)$.

Même consigne. On pourra considérer, entre autres, $f : x \mapsto \mathrm{E}(x) + \frac{1}{x}$; $g : x \mapsto |x|$.

3^e^ cas : f est discontinue en a et g est discontinue en $f(a)$

Même consigne. On pourra considérer, entre autres, $f : x \mapsto \mathrm{E}(x) + \frac{1}{x}$; $g : x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$.