DINOSTRATE PASSE À LA LIMITE

Objectif	*Étudier une construction géométrique du nombre π due aux mathématiciens grecs de l'Antiquité*[1] *et comportant un passage à la limite.*
Outils	*Limite, pour x tendant vers 0, de $\frac{\sin x}{x}$. Prolongement par continuité.*

Il s'agit d'étudier une construction géométrique du nombre π due aux mathématiciens grecs de l'Antiquité et comportant un passage à la limite.

A. Construction de la courbe d'HIPPIAS

Hippias d'Élis vivait un peu avant 400 avant Jésus-Christ. Il inventa la courbe suivante :

> ABCD est un carré de sens direct.
> E étant un point mobile sur le quart de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ de centre A, le segment $[\mathrm{AE}]$ tourne à vitesse angulaire constante autour de A, en partant de la position $[\mathrm{AB}]$.
> F étant un point mobile sur $[\mathrm{AB}]$, et Δ la droite passant par F et perpendiculaire à (AB), Δ part de la position (BC) et se déplace parallèle à elle-même, à vitesse constante, de telle façon que Δ arrive sur (AD) exactement au même instant que $[\mathrm{AE}]$ arrive sur $[\mathrm{AD}]$.
> À tout instant, sauf à l'instant final, le point M est l'intersection du segment $[\mathrm{AE}]$ et de la droite Δ.
> La trajectoire du point M est alors la *Courbe d'Hippias*.

On suppose, une unité de temps ayant été choisie, que les deux mouvements démarrent à l'instant $t = 0$ et s'achèvent à l'instant $t = 1$. On note E_t, F_t les positions des points E et F à l'instant t, pour t élément de $[\,0\,;1\,]$ et M_t la position du point M pour t élément de $[\,0\,;1\,[$.

1. Tracer un carré ABCD de côté $1\ \mathrm{dm}$, avec $[\mathrm{AB}]$ horizontal et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

   Placer les points E_t, F_t, M_t , pour les valeurs suivantes de t (à l'exception de M_t pour $t = 1$).

   $$0\,,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{15}{16},\quad \frac{31}{32},\quad \frac{63}{64},\quad 1.$$ (On pourra construire des bissectrices)

   En admettant que la courbe soit « continue », relier les différents points pour obtenir la courbe d'Hippias.

2. Le point M_t est-il défini, pour $t = 1$? Constater que , lorsque t tend vers 1, M_t s'approche d'une position limite H. Évaluer graphiquement la distance AH.

B. Fonction associée à la courbe d'HIPPIAS

Les Grecs de l'Antiquité n'utilisaient pas le concept de fonction. Il est en revanche assez naturel, à notre époque, de rechercher une fonction f dont la courbe d'Hippias soit la représentation graphique.

On se situe dans le repère $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$. Pour tout réel t de $[\,0\,;1\,[$, on note x et y l'abscisse et l'ordonnée du point M_t.

---

[1] Référence bibliographique : « Mathématiques et mathématiciens » - Dedron et Itard - éd. Magnard, 1960, p. 415-416.

1. Exprimer x en fonction de t. Exprimer en fonction de t la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_t})$.
2. Démontrer que, pour $t \neq 0$, $y = \dfrac{x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$.

   On admet donc que la courbe d'Hippias est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 0$.
3. Faire tracer la courbe représentative de f par la calculatrice graphique.
4. On recherche la limite de f en 0.

   Démontrer que si l'on pose $X = \dfrac{\pi}{2}x$, $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{2}{\pi}.\cos X.\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin X}{X}\right)}$.

   En déduire la limite de f en 0. Expliquer comment f peut être prolongée par continuité en 0.
   En déduire l'ordonnée du point H, et comparer avec la valeur obtenue graphiquement.

C. La quadrature du cercle par DINOSTRATE

On attribue à Dinostrate, qui vécut un peu plus tard, entre 400 et 300 avant Jésus-Christ, d'avoir précisé la position du point H. La démonstration[2] de Dinostrate procédait de façon exclusivement géométrique, et ne se servait pas du concept de limite que ne connaissaient pas les mathématiciens grecs de l'Antiquité.

1. Le résultat établi dans la partie B peut s'écrire : $\mathrm{AH} = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{AB}$. Démontrer que cette relation équivaut à : $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AH}} = \dfrac{\mathrm{mes}(\overset{\frown}{\mathrm{DEB}})}{\mathrm{AD}}$, où $\mathrm{mes}(\overset{\frown}{\mathrm{DEB}})$ désigne la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{DEB}}$.

Dinostrate exprimait ce résultat de la façon suivante :

Proposition de Dinostrate : Le segment AD est au segment AH comme l'arc DEB est au segment AD.

Dinostrate déduisait de cette relation une construction géométrique du nombre que nous appelons aujourd'hui π, puis une quadrature du cercle.

2. Tracer la parallèle à (BH) passant par D. Elle coupe (AB) en P. Construire le symétrique $\mathrm{P'}$ de A par rapport à P. Démontrer que la proposition de Dinostrate entraîne que $\dfrac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{AB}} = \pi$.

   Quelle approximation de π donne la figure ?
3. Démontrer que l'aire du rectangle de côtés $[\mathrm{AD}]$ et $[\mathrm{AP'}]$ est égale à l'aire du cercle de rayon $[\mathrm{AB}]$.
4. Placer le point Q tel que $\overrightarrow{\mathrm{P'Q}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Tracer un demi-cercle de diamètre $[\mathrm{AQ}]$. La perpendiculaire à (AQ) passant par $\mathrm{P'}$ coupe ce demi-cercle en R.

   Vérifier que $[\mathrm{P'R}]$ est le côté d'un carré ayant même aire que le disque de rayon $[\mathrm{AB}]$.

Dinostrate arrive donc à réaliser un des grands objectifs des mathématiques grecques : **la quadrature du cercle**, c'est-à-dire la construction d'un carré ayant même aire qu'un disque donné.

La quadrature du cercle n'est en fait pas possible à la règle et au compas, seuls instruments de construction que s'autorisaient les grecs[3].
La méthode de Dinostrate réalise cette quadrature mais en utilisant l'opération de passage à la limite, qui ne permet pas de construction parfaitement exacte, et qui était refusée par les plus puristes des géomètres de l'antiquité.

[2] La démonstration figure dans l'ouvrage cité en référence.

[3] Cette impossibilité ne fut établie qu'au XIX^{e} siècle.