C'EST TRÈS LIMITE MAIS ÇA CONTINUE

Objectif	*Démontrer la continuité ou la discontinuité en un réel de différentes fonctions.*
Outils	*Limite en un réel, limite à droite et à gauche en un réel.* *Définition de la continuité en un réel a d'une fonction réelle de variable réelle, sous la forme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.* *Théorème sur $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$, lorsque u converge vers un réel a et f admet une limite en a. Ces théorèmes sont rappelés en début de texte.*

On se propose d'étudier la continuité en 0 de différentes fonctions.

Rappels

On dit qu'une fonction f, définie en a, est continue en a, si f admet $f(a)$ pour limite en a.

Si (u_n) est une suite de réels convergeant vers a, et si f est une fonction qui admet pour limite ℓ en a, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

Exercices

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice graphique.
   Étudier la continuité de f en 0.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ si $x < 0$, $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$ si $x > 0$, et $g(0) = 0$.
   Étudier la continuité de g en 0.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$
   Tracer la courbe représentative de h sur l'écran de la calculatrice graphique.
   Étudier la continuité de h en 0. On pourra considérer les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2n.\pi$ et $v_n = 2n.\pi + \dfrac{\pi}{2}$, et raisonner par l'absurde.

4. Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$

   a. Étudier la continuité de F en 0.

   b. Soit T la fonction définie sur **R** par $T(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $T(0) = 0$.

   Étudier la continuité de T en 0.

   c. Relativement à la courbe représentative de la fonction F, quelle est l'interprétation graphique des limites de T à droite et à gauche en zéro ?

5. On appelle fonction partie entière, et on note E, la fonction qui, à tout réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x. En conséquence, pour tout réel x, on a : $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x$.

On considère les fonctions G_1, G_2 et G_3 définies sur **R** par :

$G_1(0) = 0$ et, pour tout réel x non nul, $G_1(x) = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

$G_2(0) = 1$ et, pour tout réel x non nul, $G_2(x) = x.\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

$G_3(0) = 0$ et, pour tout réel x non nul, $G_3(x) = x^2.\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Esquisser les courbes représentatives de ces trois fonctions, puis étudier la continuité de chacune d'elles en 0.

6. Soit H la fonction définie sur **R** par $H(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $H(0) = 0$.

   a. Tracer la courbe représentative de H sur l'écran de la calculatrice graphique.

   b. Démontrer que H est continue en 0.

   Démontrer que H est dérivable sur **R** et donner l'expression de $H'(x)$ pour tout réel x.

   c. Étudier la continuité en 0 de la fonction H'.