III – Monotonie et continuité

MONOTONIE SUR UNE RÉUNION D'INTERVALLES

Objectif	*Étudier les variations d'une fonction sur la réunion de deux intervalles à partir de ses variations sur chacun d'eux.*
Outils	*Monotonie* *Continuité en un point.* *Passage à la limite d'une inégalité large.*

Si f est une fonction croissante (respectivement décroissante) à la fois sur un intervalle I et un intervalle J non vides, alors f est-elle une fonction croissante (respectivement : décroissante) sur l'ensemble $\mathrm{K} = \mathrm{I} \cup \mathrm{J}$?

A. Un exemple

On rappelle que la fonction « partie entière » E associe à tout réel x le plus grand des entiers relatifs inférieurs ou égaux à x ; c'est à dire : $\begin{array}{c}\mathbf{R} \to \mathbf{Z} \\ \mathrm{E} : x \mapsto n\end{array}$ tel que $n \leq x < n+1$

Soit f et g les fonctions définies sur $[-2\,;\,0\,[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ et $g(x) = x \times \mathrm{E}(x)$.

1. Prouver que f et g sont monotones sur $[-2\,;\,-1\,[$, sur $[-1\,;\,0\,[$.
   Représenter f et g sur deux figures distinctes.
2. a. f est-elle croissante sur $[-2\,;\,0\,[$? (Calculer $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ et $f(-1)$).

   b. g est-elle décroissante sur $[-2\,;\,0\,[$?

B. Cas où $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} \neq \varnothing$

On suppose qu'il existe une réel α commun à deux intervalles I et J (donc la réunion de I et J est un intervalle K).

1. Prouver que, si f est une fonction définie et croissante à la fois sur I et sur J, alors f est croissante sur K.

> AIDE:
> Prendre x_1 et x_2 quelconques dans K tels que $x_1 < x_2$ et comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en envisageant chacun des trois cas suivants:
> - $x_1 \leq \alpha$ et $x_2 \leq \alpha$;
> - $x_1 \geq \alpha$ et $x_2 \geq \alpha$;
> - $x_1 \leq \alpha \leq x_2$.

2. Établir un résultat analogue quand f est une fonction définie et décroissante sur I et sur J.

3. Énoncer le théorème démontré.

C. Cas où $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \varnothing$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ est un intervalle

1. f est une fonction définie et croissante sur $\mathrm{I} = [\, a \,;\, b \,[$ et sur $\mathrm{J} = [\, b \,;\, c \,]$.
   a. Conjecture

      Quelle hypothèse supplémentaire peut-on ajouter sur la fonction f pour qu'elle soit croissante sur K ?

   b. Preuve

      On suppose que pour tout réel x de I on a : $f(x) \leq f(b)$. Prouver que f est croissante sur K.

AIDE
Prendre x_1 et x_2 quelconques dans K tels que $x_1 < x_2$ et comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en envisageant chacun des trois cas suivants:

- x_1 et x_2 sont tous les deux dans I ;
- x_1 et x_2 sont tous les deux dans J ;
- x_1 est dans I et x_2 est dans J.

2. Cas particulier : la fonction f est continue en b.

   On suppose que :

   - f est définie et croissante sur $\mathrm{I} = [\, a \,;\, b \,[$ et sur $\mathrm{J} = [\, b \,;\, c \,]$;
   - f est continue en b.

   a. Démontrer que, pour tout réel x de I, on a : $f(x) \leq f(b)$.

   On pourra utiliser le fait que pour tout $x' \in [\, x \,;\, b \,[$, $f(x) \leq f(x')$

   b. Énoncer le théorème démontré.

D. Cas où $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ n'est pas un intervalle

On donne la définition suivante :

Soit A une partie de **R**, qui n'est pas nécessairement un intervalle.

On dit que f est croissante (respectivement décroissante) sur A si, quels que soient x_1 et x_2 de A, tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivement: $f(x_1) \geq f(x_2)$).

1. Contre-exemple

   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est elle décroissante sur $[\, -1 \,;\, 0 \,[$ et sur $]\, 0 \,;\, 1 \,]$? f est-elle décroissante sur $[\, -1 \,;\, 0 \,[\cup]\, 0 \,;\, 1 \,]$?

On pourra s'aider d'une représentation graphique de f.

2. Conjecture

   f est une fonction définie et croissante sur chacun des intervalles I et J avec $\mathrm{K} = \mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ qui n'est pas un intervalle.

   Quelle hypothèse supplémentaire peut-on ajouter sur la fonction f pour qu'elle soit croissante sur K ?

3. Preuve

   On suppose que pour tout réel x de I et tout réel y de J on a $f(x) \leq f(y)$.

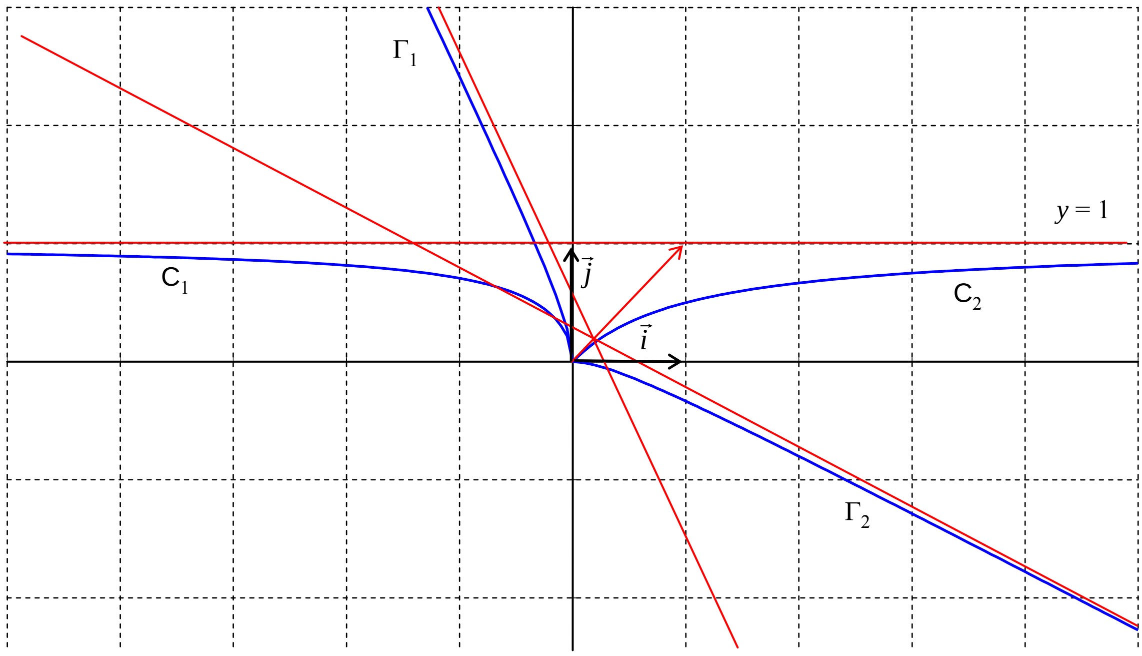
   En envisageant plusieurs cas, prouver que f est croissante sur K.

AUTRE FORMULATION DE L'HYPOTHÈSE SUPPLÉMENTAIRE
$f(\mathrm{I})$ admet une borne supérieure r , $f(\mathrm{J})$ admet une borne inférieure s , et $r \leq s$.

COMPOSÉES ET RÉCIPROQUES

Objectif	*Mettre en œuvre les concepts de fonction composée et de fonction réciproque.*
Outils	*Théorème de la bijection.* *Sens de variation de la réciproque d'une fonction et de la composée de deux fonctions.*

On se propose d'étudier une fonction définie par intervalles en utilisant les propriétés de sa fonction réciproque



Sont tracées ci-dessus les courbes C_1, C_2, Γ_1, Γ_2, représentations respectives, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty\,;0\,] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} [\,0\,;+\infty\,[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}$$

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty\,;0\,] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & -x+\sqrt{x^2-x} \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} [\,0\,;+\infty\,[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-x^2}{2x+1} \end{array}$$

Le but de ce problème est de mettre en évidence certaines relations entre ces fonctions, mettant en jeu la composition ou le passage à la fonction réciproque, et d'étudier certaines propriétés de Γ_1 et Γ_2.

1. a. Vérifier que, pour tout x de $]-\infty\,;0]$, on a $f_1(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x-1}}$.

   En déduire le sens de variation de f_1, puis que f_1 réalise une bijection de $]-\infty\,;0]$ sur $[0\,;1[$.

   b. Soit f_1^{-1} la fonction réciproque de f_1. Déterminer $f_1^{-1}(y)$, pour tout y de $[0\,;1[$.

   c. Vérifier que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f_2(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$.

   En déduire le sens de variation de f_2, puis que f_2 réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;1[$.

   d. Soit f_2^{-1} la fonction réciproque de f_2. Déterminer $f_2^{-1}(y)$, pour tout y de $[0\,;1[$.

2. a. Démontrer que $\varphi_1=f_2^{-1}\circ f_1$ et que $\varphi_2=f_1^{-1}\circ f_2$.

   b. En déduire le sens de variation de φ_1 et celui de φ_2.

   c. Démontrer que les fonctions f_1 et φ_1 sont réciproques l'une de l'autre. Qu'en déduit-on pour leurs courbes représentatives Γ_1 et Γ_2 ?

3. a. Déterminer les réels α, β et γ tels que, pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, on ait $\varphi_2(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{2x+1}$

   En déduire que Γ_2 admet pour asymptote une droite Δ_2 que l'on précisera.

   b. On note s la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=x$. On admet le résultat suivant : si une courbe C admet pour asymptote une droite Δ, alors la courbe s(C) admet pour asymptote la droite $s(\Delta)$.

   Démontrer alors que Γ_1 admet pour asymptote une droite Δ_1 que l'on précisera.

   c. g_1 désigne la fonction affine telle que $y=g_1(x)$ soit l'équation réduite de Δ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Retrouver le résultat démontré au b en démontrant que $\lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi_1(x)-g_1(x))=0$.

   INDICATION
   Démontrer que, pour tout réel x supérieur à 1 :
   $\varphi_1(x)-g_1(x)=x\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)-\dfrac{1}{2}$ puis utiliser une expression conjuguée.

4. a. Démontrer que Γ_2 admet l'axe des abscisses pour tangente au point origine.

   b. s étant la réflexion définie à la question 3.b., on admet que, si une courbe représentative C admet la droite Δ pour tangente en M, alors la courbe s(C) admet la droite $s(\Delta)$ pour tangente en s(M).

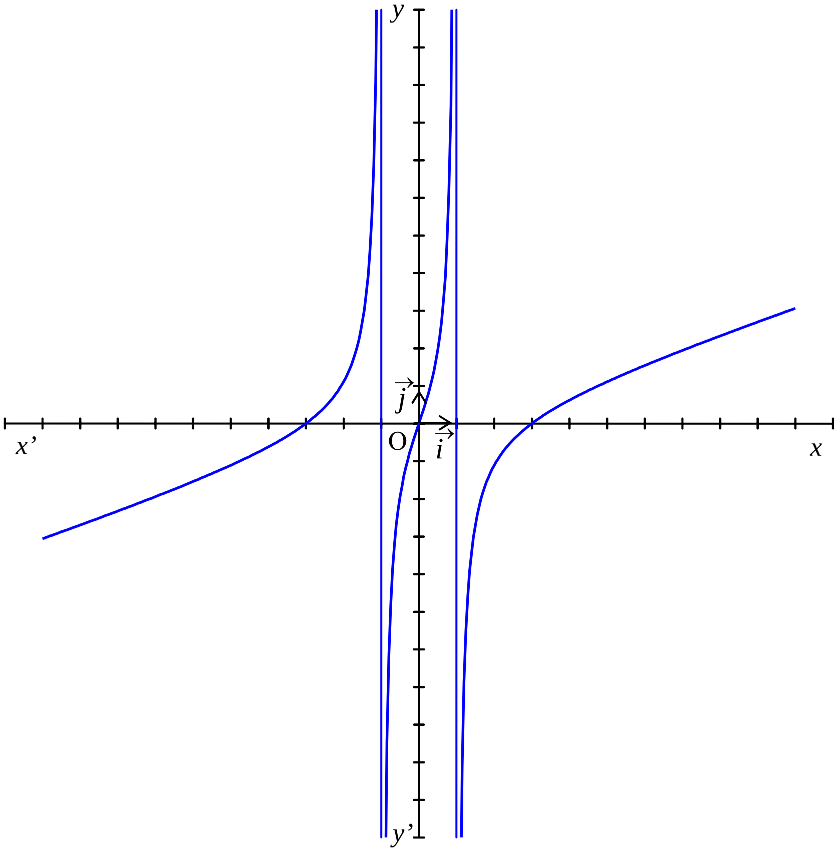
   Déduire de ce résultat la tangente à Γ_1 au point origine.

DE COURBES EN COURBE

Objectif	*Terminale scientifique.* *Se familiariser avec les notions de fonction réciproque et de composée, y compris sous l'aspect graphique.*
Outils	*Fonctions réciproques, fonctions composées.* *Représentation graphique des fonctions composées.*

On se propose de construire, dans un cas particulier, la représentation graphique d'une fonction non définie explicitement.

Soit f la fonction définie sur **R**$-\{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x)=\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+1}\right)$ dont voici, ci-dessous, la courbe représentative dans un repère orthonormal.



1. Démontrer que f est impaire. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2. On désigne par F la restriction de f à l'intervalle $]-1\ ;\ 1\ [$.
   a. Démontrer que F est une bijection de $]-1\ ;\ 1\ [$ sur **R**.
   b. Soit F^{-1} la réciproque de F. Sans la calculer, démontrer que F^{-1} est impaire.

3. Pour a élément de **R**–$\{-1\ ;\ 1\}$, on considère l'équation $f(x) = f(a)$ notée (E).
   a. Grâce aux variations de f, démontrer que cette équation possède exactement trois solutions que l'on comparera aux nombres -1 et 1.
   b. Vérifier que, pour tout x de **R**–$\{-1\ ;\ 1\}$, on a :
   $$f(x) - f(a) = \frac{1}{3}(x-a)\cdot\frac{[(a-1)x+3+a][(a+1)x+3-a]}{(a+1)(a-1)(x+1)(x-1)}$$
   En déduire la résolution de l'équation. (E).

4. Soit u et v les fonctions définies par : $u(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ pour $x \neq -1$ et $v(x) = \dfrac{-(x+3)}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
   a. Dans un repère orthonormal, $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$ tracer la courbe représentative (C_u) de u.
   b. Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, $v(x) = -u(-x)$.
   Interpréter graphiquement cette relation et en déduire le tracé de la courbe représentative (C_v) de v dans le même repère.
   c. À l'aide de la question 3.a, expliquer pourquoi la réunion (U) des courbes (C_u) et (C_v) n'a pas de point dans le carré défini par $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$ et pourquoi, pour chaque nombre réel a strictement supérieur à 1, ou strictement inférieur à -1, (U) possède un seul point d'abscisse a dans la bande définie par $-1 < y < 1$.

5. Soit φ la fonction définie sur **R** $-\{-1\ ;\ 1\}$ par $\varphi(x) = F^{-1}(f(x))$ et (Φ) sa courbe représentative dans le repère précédent.
   a. Pour a élément de **R** $-\{-1\ ;\ 1\}$, à quel ensemble appartient $\varphi(a)$?
   b. Tracer la courbe représentative de la restriction de (Φ) à l'intervalle $]-1\ ;\ 1\ [$.
   c. À l'aide des courbes (C_u) et (C_v), achever la construction de (Φ).

LA TORTUE ET LE LAPIN D'ALICE

Objectif	*Résoudre un problème du type « plaisant et délectable ».*
Outils	*Théorème des valeurs intermédiaires*

Alice ne trouva pas non plus très extraordinaire d'entendre le Lapin marmonner « Oh ! Mon Dieu, mon Dieu ! Je vais être en retard. » (...) En revanche, quand elle vit le Lapin tirer une montre de la poche de son gilet, regarder l'heure puis partir en courant, Alice bondit, car elle venait de comprendre dans un éclair qu'elle n'avait jamais vu un lapin tirer une montre de la poche de son gilet.

Alice au pays des merveilles
Lewis Carroll

Pourquoi une montre ? Alice ne sait pas que le Lapin en a besoin car il a rendez-vous avec la Tortue de la fable pour pique-niquer à la campagne ...

Lors de cette promenade champêtre, le Lapin et la Tortue ont décidé de partir ensemble du lieu de rendez-vous et, suivant un même chemin, de se retrouver à un endroit convenu riche en laitues et carottes sauvages. Mais dame Tortue avance uniformément à son train de sénateur (50 mètres par heure). Le Lapin trouvant sa compagne trop lente, part devant, en suivant le chemin, puis revient à la Tortue, repart vers le but, recommence son manège... Joueur invétéré, il fait le pari suivant :

« Foi de Lapin ! j'arriverai au but au même instant que dame Tortue mais je ne réaliserai une vitesse moyenne égale à la sienne sur aucun des intervalles de temps d'une heure. »

Le pari du Lapin est-il tenable ?

Pour tenter de répondre à cette question, on considère la fonction L donnant la position du lapin par rapport au point de départ (en mètres), en fonction du temps écoulé depuis le départ (en heures). L est évidemment une fonction continue (abscisse du lapin sur une trajectoire). On note D la durée, en heures, de la promenade, identique pour les deux animaux ; on suppose que D est strictement supérieur à 1.

A. Propriété de l'écart Lapin-Tortue

1. Exprimer le projet du Lapin en conditions sur la fonction L .

2. On note $f(t)$ l'écart, à l'instant t, entre le Lapin et la Tortue.
   Exprimer $f(t)$ en fonction de $L(t)$.
   Traduire le projet du Lapin en conditions sur la fonction f.

B. Où D est entier

On suppose dans cette partie que D est un entier strictement supérieur à 1.

Soit g la fonction définie sur $[\,0\,;\,D-1\,]$ par $g(t) = f(t+1) - f(t)$.

1. a. Démontrer que $g(0) + g(1) + ... + g(D-1) = 0$.

   b. En déduire que, si $g(k)$ est positif (resp. négatif) pour tout entier k de $\{\,0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,D-1\,\}$, alors $f(0) = f(1) = \ldots = f(k) = f(D)$.

   Calculer alors la vitesse moyenne du lapin entre les instants k et $k+1$, pour k entier, élément de $\{\,0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,D-1\,\}$

2. Démontrer que, s'il existe des entiers i et j appartenant à $\{\,0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,D-1\,\}$, avec $i < j$ et tels que $g(i)\,g(j) < 0$, alors il existe un réel t_0, élément de $[\,i\,;\,j\,]$, tel que $f(t_0+1) - f(t_0) = 0$.

   Déterminer alors la vitesse moyenne du lapin entre les instant t_0 et t_0+1

3. Conclure quant au pari du Lapin lorsque D est un entier strictement supérieur à 1.

C. Où le pari est tenu

On considère D non entier ; par exemple $D = 4{,}3$.

On se propose de construire une loi horaire du lapin, affine par intervalle, lui permettant de tenir son pari.

On pose d'abord, par exemple, pour tout entier n élément de $\{\,0\,,1\,,2\,,3\,,4\,\}$, $f(n) = 50\,n$ et $f(4{,}3-n) = -50\,n$.

1. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (4 cm pour une heure sur l'axe des abscisses ; 4 cm pour 100 m sur l'axe des ordonnées).

   a. Placer les points de $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de n données ci-dessus.

   b. On définit f comme la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est la réunion des segments joignant, dans l'ordre des abscisses croissantes, les points considérés précédemment. Tracer alors $\mathcal{C}$.

   c. Soit h la fonction définie sur $[\,0\,;\,3{,}3\,]$ par $h(t) = f(t+1)$. Tracer dans le même repère la courbe $\mathcal{C}'$ représentant h. Constater graphiquement que, pour tout réel t de $[\,0\,;\,3{,}3\,]$, $f(t) < f(t+1)$.

   d. Démontrer ce résultat, en considérant la fonction g définie sur $[\,0\,;\,3{,}3\,]$ par $g(t) = f(t+1) - f(t)$.

   (On pourra d'abord déterminer $g(n)$ et $g(4{,}3-n)$ pour tout entier n élément de $\{\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,\}$ puis démontrer que g est constante sur chacun des intervalles $[\,n\,;\,n+0{,}3\,]$ et $[\,n+0{,}3\,;\,n+1\,]$, pour tout entier n élément de $\{\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,\}$).

2. Soit L la fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,4{,}3\,]$ par $L(t) = f(t) + 50\,t$

   a. Vérifier que cette fonction L est une loi horaire du lapin réalisant son projet pour une durée commune de promenade $D = 4{,}3$.

   b. Tracer sur un nouveau graphique, avec les mêmes unités, les courbes représentatives de T, loi horaire de la tortue, ainsi que de L.

   c. Vérifier graphiquement que le lapin rencontre deux fois la tortue au cours de chacun des intervalles de temps $[\,1\,;\,2\,]$, $[\,2\,;\,3\,]$, $[\,3\,;\,4\,]$.

> REMARQUE
> La construction qui vient d'être faite d'une loi horaire réalisant le projet du lapin peut facilement s'adapter à toute valeur non entière de D.

D. Où l'on démontre que, s'il tient son pari, le lapin croise souvent la tortue

Dans cette partie on suppose le lapin tient son pari et que D est un réel non entier strictement supérieur à 1. La fonction f est celle qui a été définie dans la partie A.

1. Démontrer que l'on est dans l'un des cas suivants :

   – ou bien, pour tout t de $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$, $f(t) < f(t+1)$,

   – ou bien, pour tout t de $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$, $f(t) > f(t+1)$.

   (On pourra considérer la fonction g définie sur $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$ par $g(t) = f(t+1) - f(t)$).

On suppose dans la suite que, pour tout t appartenant à $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$, on a $f(t) < f(t+1)$ (l'autre cas se traiterait de façon similaire).

2. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est l'entier naturel p tel que $p \leq x < p+1$. On note $N = E(D)$.

   On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n de $[\ 0\ ;\ N\ ]$ par : $u_n = n$ et $v_n = D - n$ (aux instants u_n, un nombre entier d'heures s'est écoulé depuis le départ ; aux instants v_n, il va s'écouler un nombre entier d'heures jusqu'à l'arrivée).

   a. Démontrer que, sur $[\ 0\ ;\ N\ ]$, la suite $(f(u_n))$ est strictement croissante et la suite $(f(v_n))$ strictement décroissante.

   b. En déduire le signe de $f(u_n)$ et $f(v_n)$ pour n entier appartenant à $[\ 0\ ;\ N\ ]$.

3. On suppose N supérieur ou égal à 3. Pour n entier compris entre 1 et $N-1$, on pose $k = E(D-n)$.

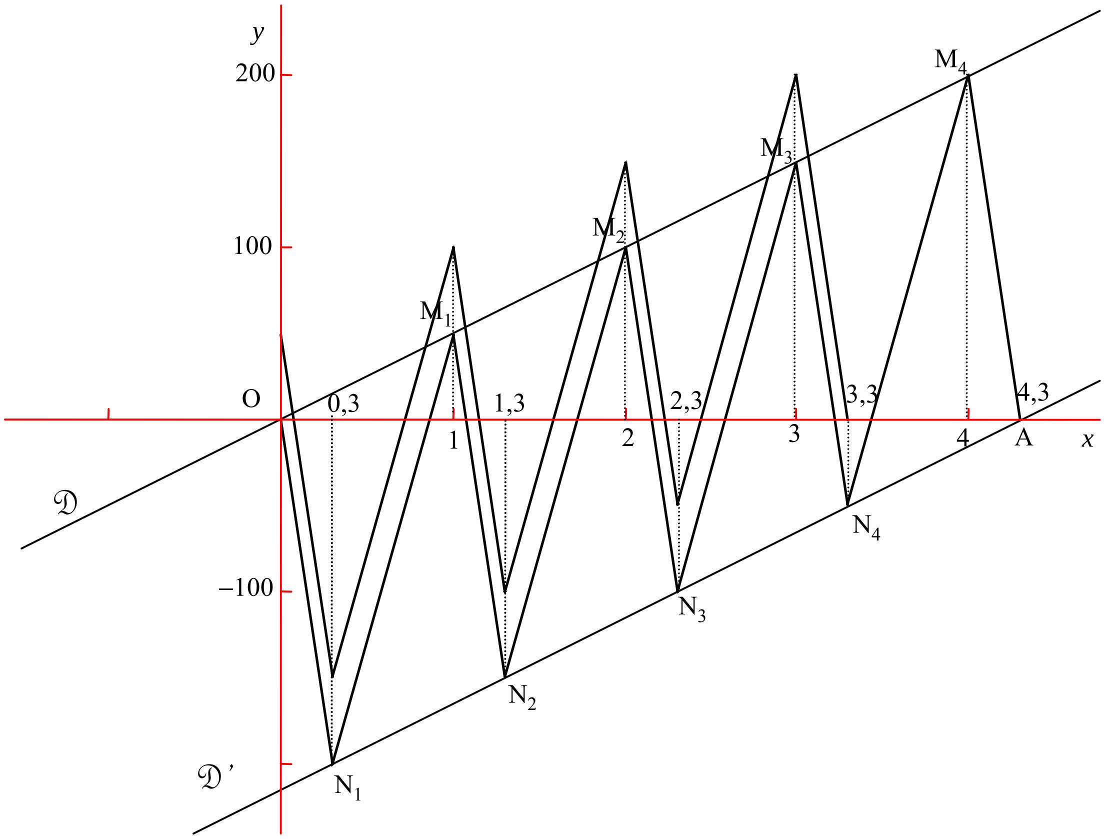
   Démontrer que v_k appartient à l'intervalle $[\ n\ ;\ n+1\ ]$.

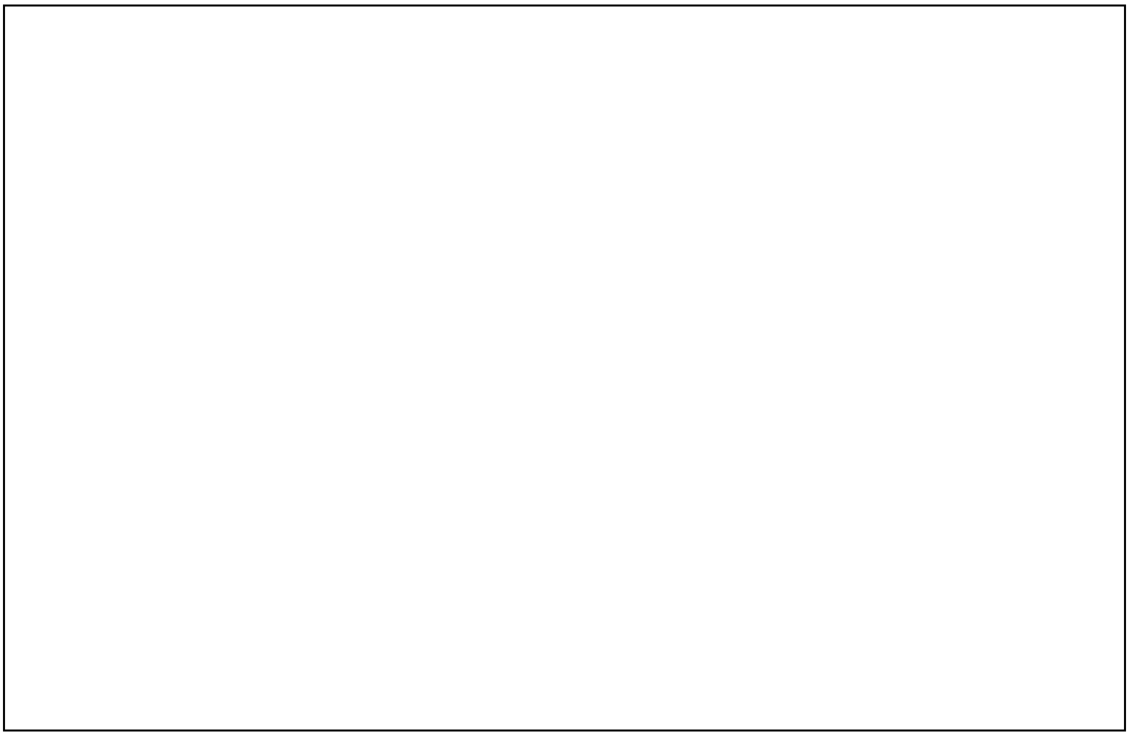
   En déduire que le lapin rencontre la tortue au moins deux fois au cours de chacun des intervalles de temps de la forme $[\ n\ ;\ n+1\ ]$, pour tout entier n compris entre 1 et $N-1$. (On pourra considérer les intervalles $[\ n\ ;\ v_k\ ]$ et $[\ v_k\ ;\ n+1\ ]$).

> REMARQUE
> Pour réaliser les conditions de la question 2 sur $f(u_n)$ et $f(v_n)$, écarts avec la tortue à certains instants précis, le lapin doit respecter de strictes contraintes horaires, d'où la nécessité pour lui d'avoir une montre... et la citation d'Alice au Pays des Merveilles, en exergue.

ANNEXES

Graphique de la partie C





LA MONOTONIE A SES LIMITES

Objectif	*Utiliser le théorème sur les fonctions monotones bornées pour démontrer l'existence de limites.*
Outils	*Existence d'une limite pour une fonction monotone bornée.* *Fonctions exponentielles de base a.*

On se propose d'étudier une fonction pour laquelle l'existence de limites est obtenue grâce au théorème sur les fonctions monotones bornées. La fonction étudiée ici associe à tout réel a de $]\,1\,;\mathrm{e}\,[$ (ou de $]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$) l'unique solution de l'équation $a^x = x+1$. Cette fonction est décroissante et minorée et, par suite, admet une limite finie lorsque a tend vers e (ou, suivant le cas, $+\infty$), limite que l'on peut calculer.

A. Approche graphique

Pour tout réel a de l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$, on note Γ_a la représentation graphique, dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ du plan, de la fonction $\exp_a$ définie, pour tout réel x, par $\exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a)$.

On a représenté sur la figure les courbes Γ_a pour a appartenant à $\mathrm{V} = \{\,1{,}5\,;\,1{,}8\,;\,2\,;\,2{,}3\,;\,3{,}5\,;\,4\,;\,5\,\}$ et la droite Δ d'équation $y = x+1$. On a aussi tracé la droite D d'équation $y = x$ et les droites d'équations $y = -1$ et $x = 1$.

On s'intéresse à la résolution de l'équation $a^x = x+1$, notée (E_a).

Le graphique semble faire apparaître que, pour tout a élément de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, (E_a) admet une unique solution non nulle. On admet provisoirement ce résultat, dans cette partie A, et on note f la fonction qui, à tout élément a de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, associe la solution unique de (E_a). On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Associer à chaque courbe Γ_a tracée sur la figure la valeur de a correspondante. Écrire à côté de chaque courbe son équation.

2. Pour chacune des valeurs a appartenant à V, placer $f(a)$ sur l'axe des abscisses, puis, grâce à la droite D, placer $f(a)$ sur l'axe des ordonnées ; enfin, construire le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

3. Conjecturer, d'après ces quelques points, le tableau de variations de f, y compris les limites.

> Les parties suivantes ont pour but de vérifier cette conjecture.
> On s'intéresse pour cela à la fonction g_a donnant l'écart algébrique, à une abscisse donnée, entre Γ_a et Δ : pour tout a de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, g_a est définie sur 3 par $g_a(x) = a^x - (x+1)$.

B. Étude des fonctions g_a

1. Pour a élément de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, étudier les variations de g_a.
   Démontrer que g_a admet un minimum en un réel α_a que l'on exprimera en fonction de a.

2. Étudier les limites de g_a en $+\infty$ et en $-\infty$. Dresser le tableau de variation de g_a.

C. Solution non nulle de l'équation (E_a) pour $a \in]\,1\,;\,e\,[$

Soit a un élément de $]\,1\,;\,e\,[$.

1. a. Démontrer que, dans ce cas, α_a est strictement positif.

   Calculer $g_a(0)$ et en déduire le signe de $g_a(\alpha_a)$.

   b. Démontrer que l'équation (E_a) admet une unique solution non nulle.

   On note cette solution $f(a)$. On définit ainsi la fonction f sur l'intervalle $]\,1\,;\,e\,[$.

2. a. Soit a et a' deux nombres tels que $1 < a < a' < e$.

   Démontrer que $g_a(f(a')) - g_a(f(a)) = a^{f(a')} - a'^{f(a')}$.

   Comparer $g_a(f(a'))$ et $g_a(f(a))$, puis $f(a')$ et $f(a)$.

   b. En déduire le sens de variation de f sur $]\,1\,;\,e\,[$.

3. a. Déduire de la question précédente que $f(a)$ admet une limite finie ℓ lorsque a tend vers e par valeurs inférieures.

   b. Démontrer que ℓ vérifie l'équation $e^{\ell} = \ell + 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

   c. En remarquant que $f(a) \geq \alpha_a$ pour a élément de $]\,1\,;\,e\,[$, déterminer la limite de f en 1.

D. Solution non nulle de l'équation (E_a) pour $a \in]\,e\,;\,+\infty\,[$

Soit a élément de $]\,e\,;\,+\infty\,[$.

1. a. Démontrer que dans ce cas α_a est strictement négatif.

   Calculer $g_a(0)$ et en déduire le signe de $g_a(\alpha_a)$.

   b. Démontrer que l'équation (E_a) admet une unique solution non nulle.

   On note de nouveau cette solution $f(a)$. On a ainsi prolongé la fonction f à l'intervalle $]\,e\,;\,+\infty\,[$. f est donc définie sur l'ensemble $]\,1\,;\,+\infty\,[\setminus \{e\}$ et associe à tout réel a l'unique solution non nulle de l'équation (E_a).

2. Par une méthode analogue à celle utilisée dans la question C.2., démontrer que f est strictement décroissante sur $]\,e\,;\,+\infty\,[$.

3. a. En déduire que $f(a)$ admet une limite finie lorsque a tend vers e par valeurs supérieures.

   b. Déterminer cette limite.

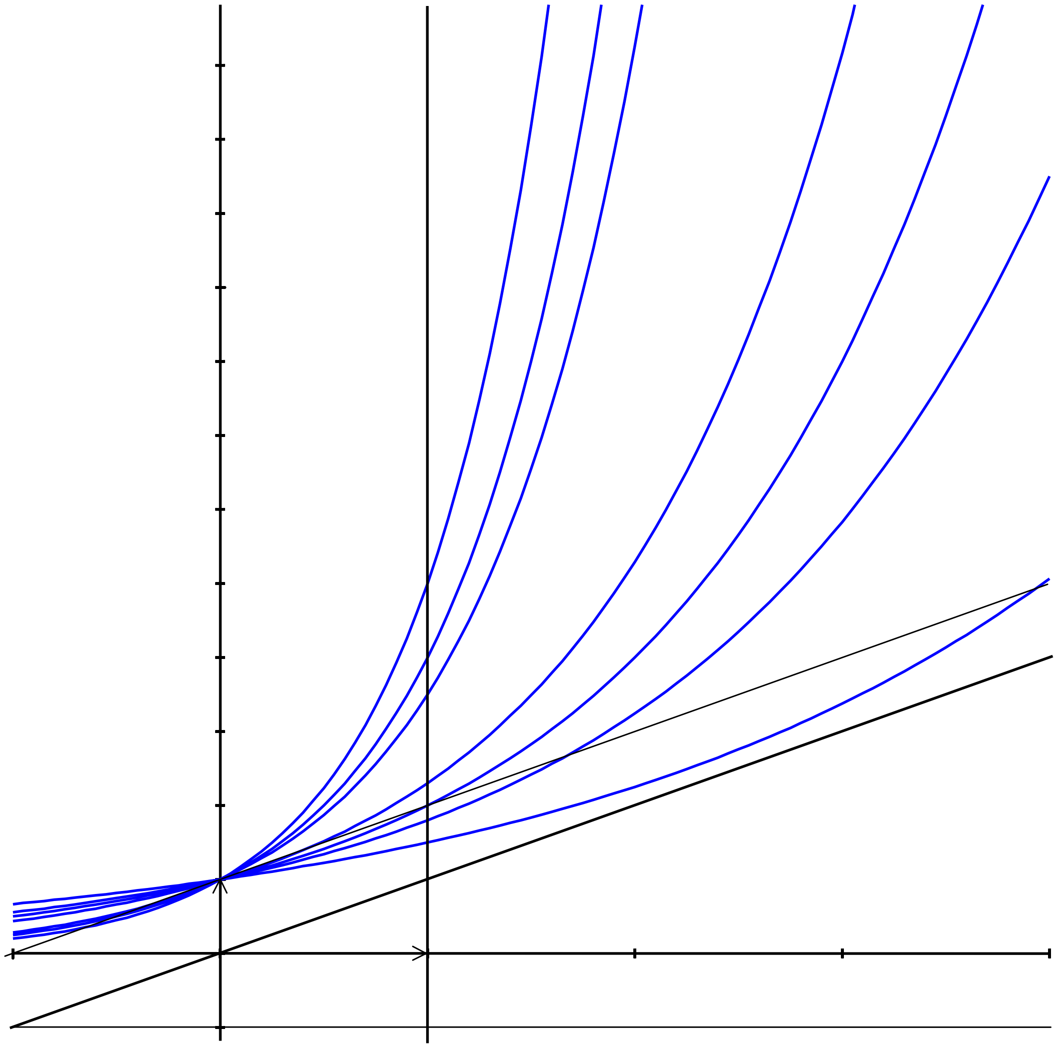
   c. Définir le prolongement par continuité de f en e.

4. a. Démontrer que f admet une limite finie L en $+\infty$, et que L est strictement négative.

   b. Démontrer que $L = -1$.

E. Bilan

Le tableau de variation conjecturé dans la partie A s'est-il révélé exact ?



FONCTIONS CARRÉMENT ASSOCIÉES

Objectif	*Étudier une équation fonctionnelle se rattachant à une construction géométrique, en s'appuyant sur les résultats de l'ensemble du programme d'analyse.*
Outils	*Théorème de bijection sur un intervalle ouvert. Monotonie. Théorème des valeurs intermédiaires. Réciproque d'une bijection. Sens de variation de la bijection réciproque.*

Soit f est une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit M un point de $\mathcal{C}$, H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O; \vec{i})$, H' et M' les points tels que $MHH'M'$ soit un carré de sens direct.

Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, M' décrit une courbe $\mathcal{C}'$. On va tenter de répondre aux questions suivantes :

– Est-ce que $\mathcal{C}'$ est la courbe représentative d'une fonction g ?

– Si oui, est-ce que g est définie pour tout réel ?

A. Explorations graphiques sur des exemples

1. On pose $f(x) = 3x + 1$. Construire point par point $\mathcal{C}$ puis $\mathcal{C}'$.

   Grâce au graphique, émettre une conjecture sur l'existence d'une fonction g et, si g existe, sur son ensemble de définition.

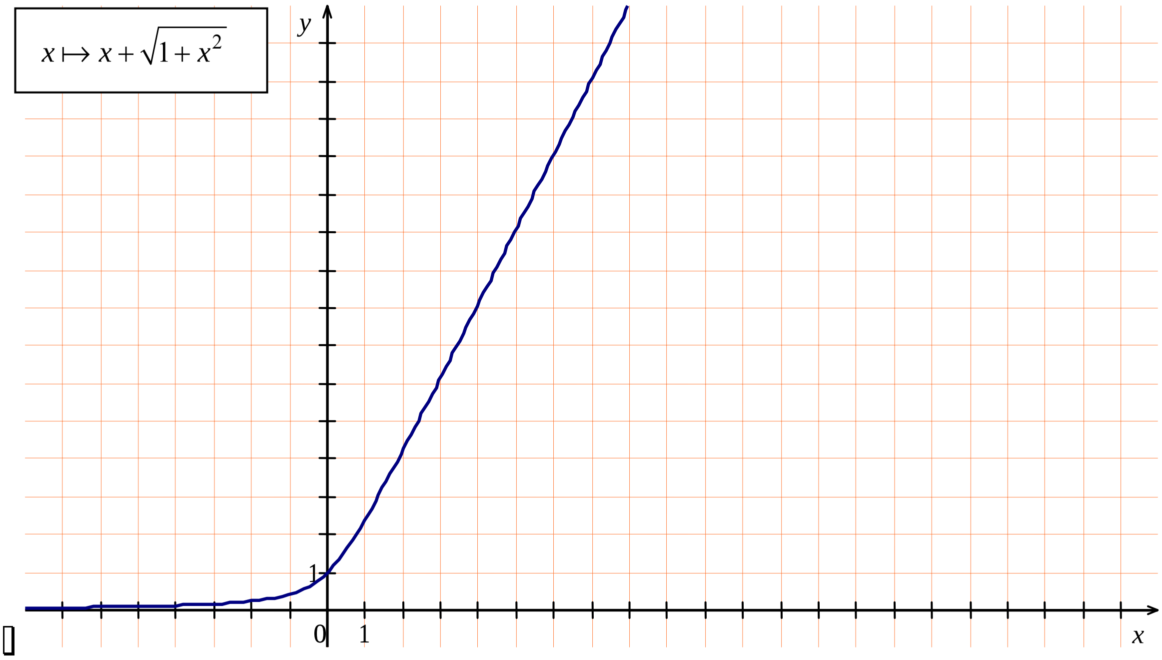
2. On pose $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$. On donne ci-après sa représentation graphique.
   Esquisser $\mathcal{C}'$.
   Semble-t-il exister une fonction g dont $\mathcal{C}'$ soit la représentation graphique ?
   Si oui, quel est l'ensemble de définition de g ?

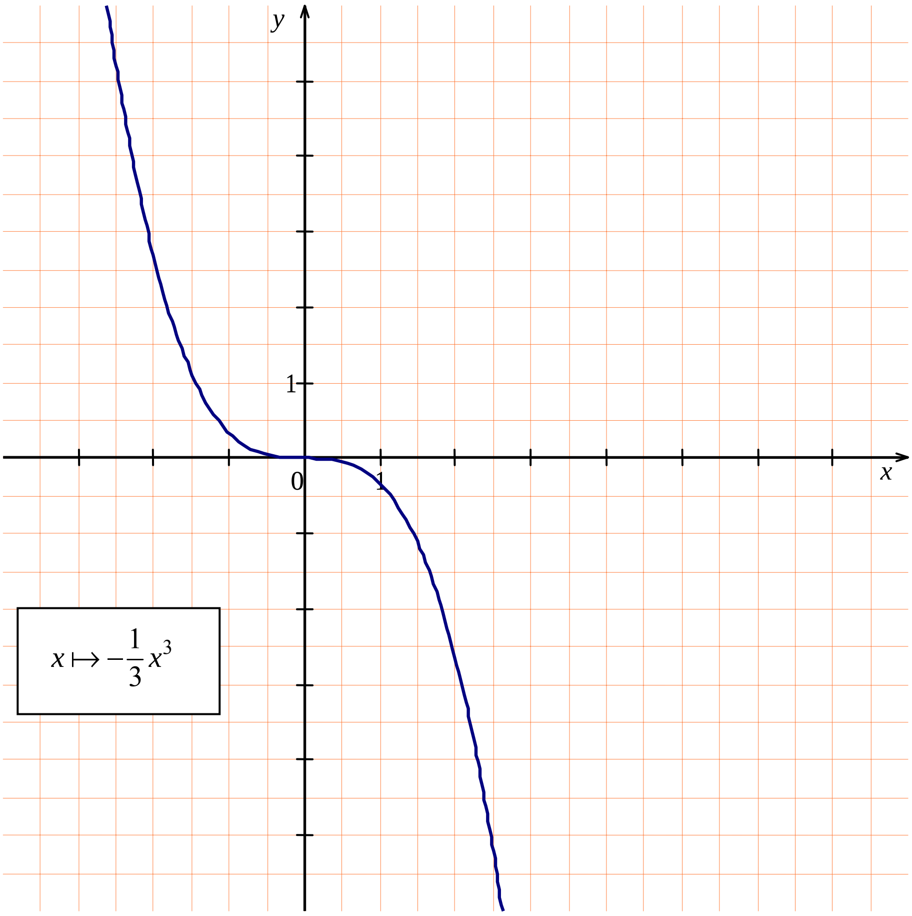
3. On pose $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3$. On donne ci-après sa représentation graphique.

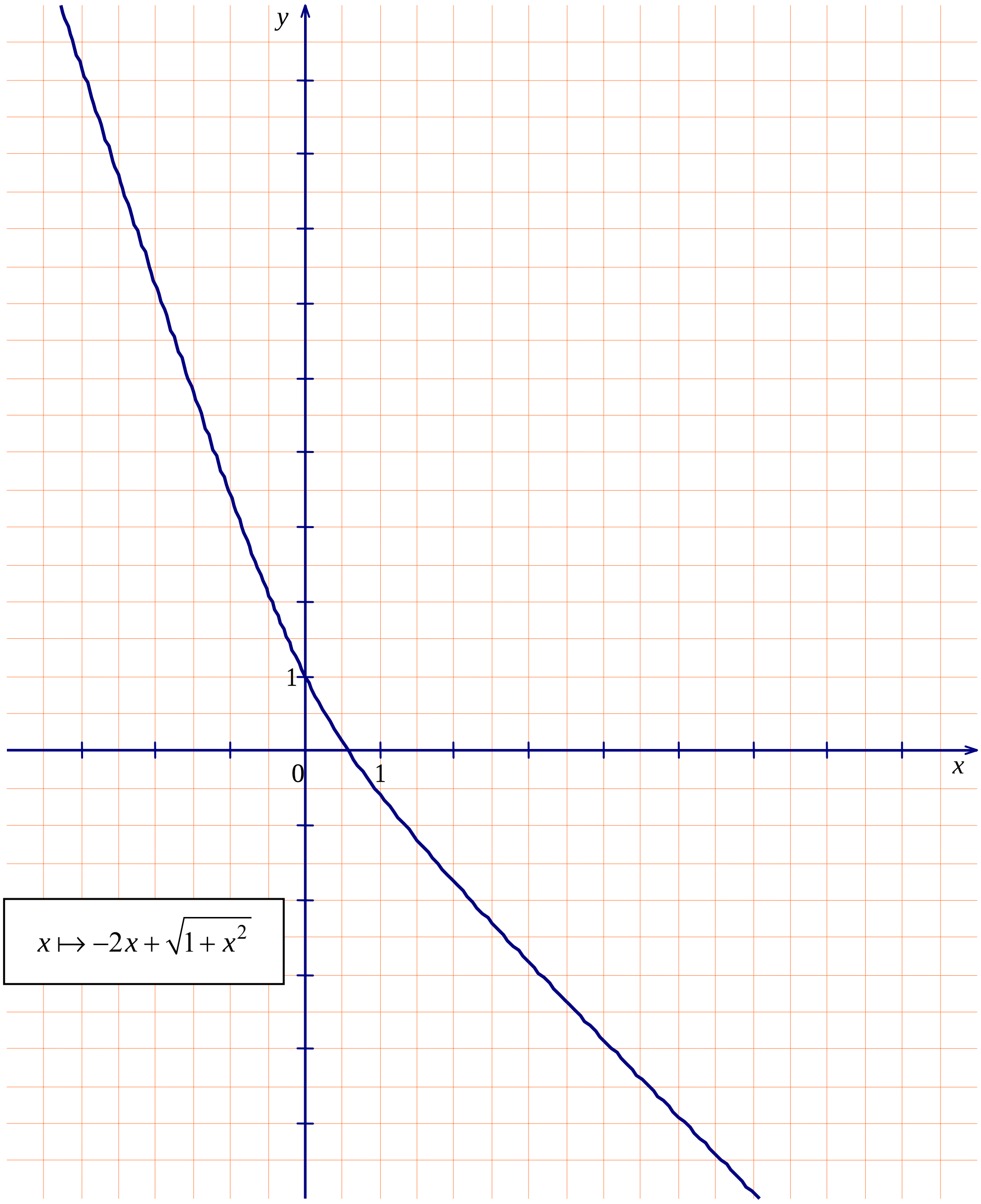
   Répondre aux mêmes questions que précédemment

4. On pose $f(x) = -2x + \sqrt{1 + x^2}$. On donne ci-après sa représentation graphique.

   Répondre aux mêmes questions que précédemment


$x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$
y
1
0
1
x


y
1
0
1
x
$x \mapsto -\frac{1}{3}x^3$


y
x
0
1
1
$x \mapsto -2x + \sqrt{1 + x^2}$

B. Traduction du problème en une condition sur *g*

1. a. Démontrer que, si M a pour abscisse x, M' a pour coordonnées $(x + f(x)\ ;\ f(x))$.

   b. En déduire que $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles qu'il existe un réel x vérifiant $\begin{cases} x' = x + f(x) \\ y' = f(x) \end{cases}$.

   c. On note Φ la fonction définie sur 3 par $\Phi(x) = x + f(x)$.

   Démontrer que $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique d'une fonction g si et seulement si :

   - g est définie sur $\Phi(3)$, et
   - pour tout réel x, $g(x + f(x)) = f(x)$. On note (C) cette condition.

   Le problème se ramène donc, pour une fonction f définie continue sur 3, à déterminer $\Phi(3)$, puis à étudier l'existence d'une fonction g vérifiant la condition (C).

2. Application aux fonctions affines.

   On pose $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux constantes réelles.

   a. Démontrer que, si $a = -1$, aucune fonction g ne vérifie la condition (C).

   b. Démontrer que, si $a \neq -1$, alors la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction g, définie sur 3, que l'on déterminera.

   > Aide
   > On pourra utiliser la variable $X = (a + 1) + b$.

   c. Déterminer la fonction g dans le cas où $f(x) = 3x + 1$.

C. Étude du cas particulier où la fonction *f* est croissante

On suppose que la fonction f est croissante sur 3.

1. a. Démontrer que Φ est continue et strictement croissante sur 3.

   b. Pour x positif, comparer $f(x) + x$ et $f(0) + x$. En déduire la limite de Φ en $+\infty$.

   c. Par un raisonnement analogue, déterminer la limite de Φ en $-\infty$.

   d. Démontrer que Φ est bijective de 3 sur 3. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.

2. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}'$ représente une fonction g, définie sur 3, que l'on exprimera en fonction de f et de Φ^{-1}.

3. On pose $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

   a. Démontrer que f est strictement croissante sur 3.

   b. Démontrer que Φ^{-1} est définie, pour tout réel y, par $\Phi^{-1}(y) = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}\sqrt{y^2 + 3}$.

   c. Grâce à la relation $\Phi(\Phi^{-1}(x)) = x$, démontrer que, pour tout réel x, $\sqrt{1 + \Phi^{-1}(x)} = x - 2\,\Phi^{-1}(x)$.

   d. Soit g la fonction représentée par $\mathcal{C}'$. Déduire des questions précédentes l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.

D. Discussion sur l'existence d'une fonction g et son ensemble de définition à partir des propriétés de Φ

On ne suppose plus obligatoirement que f est croissante.

1. Cas où Φ n'est pas strictement monotone.
   a. On admet qu'il existe alors des réels a, b et c tels que $a < b < c$, et tels que $(\Phi(b) - \Phi(a))$ et $(\Phi(c) - \Phi(b))$ soient de signes contraires.

      En considérant la fonction Ψ : $t \mapsto \Phi[(1-t)a + tb] - \Phi[(1-t)b + tc]$ et en calculant $\Psi(0)$ et $\Psi(1)$, démontrer qu'il existe deux réels α et β distincts tels que $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$.

   b. Démontrer que $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

      En déduire qu'il n'existe pas de fonction g vérifiant la condition (C).

   c. Vérifier que, dans l'exemple de la question A.3., la fonction Φ n'est pas monotone.

2. Cas où Φ est strictement monotone.
   a. Démontrer alors que Φ est une bijection de 3 sur $\Phi(3)$.

   b. Soit Φ^{-1} sa bijection réciproque, de $\Phi(3)$ sur 3.

      Démontrer que la courbe $\mathcal{C}'$ représente une fonction g, définie sur $\Phi(3)$, que l'on exprimera en fonction de f et de Φ^{-1}.

3. Un exemple avec Φ strictement décroissante.

   On se place dans le cadre de l'exemple de la question A.4.

   a. Démontrer que Φ est strictement décroissante (on pourra admettre que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ admet comme dérivée sur 3 $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

   b. Déterminer $\Phi(3)$, puis la fonction réciproque de Φ, notée Φ^{-1}.

   c. Déterminer la fonction g, après avoir démontré, à partir de l'égalité $\Phi(\Phi^{-1}(x)) = x$, que, pour tout réel x de $\Phi(3)$, $\sqrt{1+\Phi^{-1}(x)} = x + \Phi^{-1}(x)$.

Annexe 1. Illustration informatique

Il est intéressant d'obtenir conjointement, avec GÉOPLAN, les tracés des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ pour diverses formes de la fonction f.

Afin d'obtenir un imagiciel très rapidement modifiable, on peut :

① Définir la fonction proposée

② Le logiciel ne permet de tracer la courbe que sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$. Pour pouvoir modifier a et b avec la souris, on peut créer deux points A et B libres sur l'axe des abscisses, puis définir a et b comme abscisses de A et B. En bougeant A et B on modifie a et b.

③ Créer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction proposée sur $[\,a\,;b\,]$

④ Créer un réel libre, x, sur l'intervalle $[a\,;b]$, ou, mieux, un point libre X sur le segment [AB] puis définir son abscisse x.

⑤ Créer le point M $(x\,;f(x))$

⑥ Créer le point H, projection orthogonale de M sur l'axe des abscisses, le point M', image de H par la rotation de centre M et d'angle 90°, le point H', projection orthogonale de M' sur l'axe des abscisses ; enfin tracer le carré MHH'M'.

⑦ Tracer le lieu de M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

```
----- OBJETS PREDEFINIS -----
O origine du repère Roxy
Ox droite portant l'axe des abscisses de Roxy
Oy droite portant l'axe des ordonnées de Roxy
Roxy repère orthonormal
i premier vecteur de base de Roxy
j second vecteur de base de Roxy
Uoxy unité de longueur liée au repère Roxy
tIme représente l'heure (en secondes)
----- OBJETS CONSTRUITS -----
f fonction: x|->0.5x+sinx
A point libre sur la droite Ox
a abscisse de A (repère Roxy)
B point libre sur la droite Ox
b abscisse de B (repère Roxy)
Cf graphe de f sur [a,b] (300 points, repère Roxy)
X point libre sur le segment [AB]
x abscisse de X (repère Roxy)
M point de coordonnées (x,f(x)) dans le repère Roxy
H projeté orthogonal de M sur Ox
M' image de H par la rotation de centre M et d'angle 90 (degré)
H' projeté orthogonal de M' sur Ox
Segment [MH]
Segment [HH']
Segment [H'M']
Segment [M'M]
Cg lieu du point M', pilote X (300 points)
```

Les illustrations qui suivent ont été obtenues à partir de cet imagiciel en modifiant seulement la fonction f.

Outre les exemples proposés dans cette séquence, on peut étudier différents cas :

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = x + 1$;

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = 1$;

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = -x + 1$;

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = -2x + 1$;

$\mathcal{C}$ est le demi-cercle « positif » de centre O et de rayon 1 ;

$\mathcal{C}$ est la parabole d'équation $y = x^2$;

$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction partie entière ;

$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction sinus ;

$\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $\boxed{\quad\quad}$.

Annexe 2. Un exemple avec f non monotone

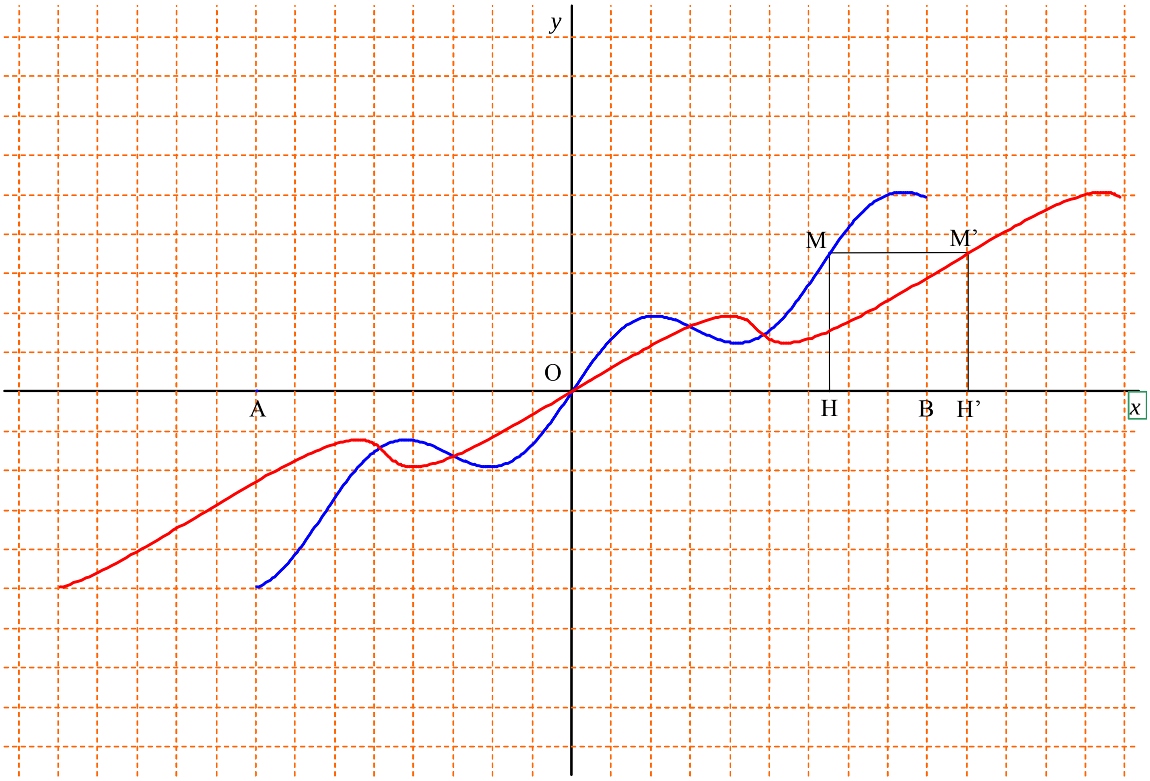
On considère la fonction f définie sur 3 par $f(x) = 0{,}5\,x + \sin(x)$.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f et la courbe $\mathcal{C}'$ correspondante.

On peut démontrer que la fonction Φ correspondante est strictement croissante sur 3, et donc que la courbe $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique d'une fonction g. On peut aussi démontrer que g est définie sur 3.

On remarquera que dans ce cas ni f ni g ne sont monotones.

Expliciter la fonction g serait difficile ici. Les cas étudiés plus haut, où l'on peut trouver des expressions pour les fonctions Φ et g sont exceptionnellement favorables.



Annexe 3. Autre version du problème

On peut poser le problème en remplaçant les fonctions par :

dans la question A.2 : $f(x) = \ln(1 + e^{x})$

dans la question A.4. : $f(x) = -x + e^{-x}$.

Annexe 4. Courbes obtenues dans la partie A