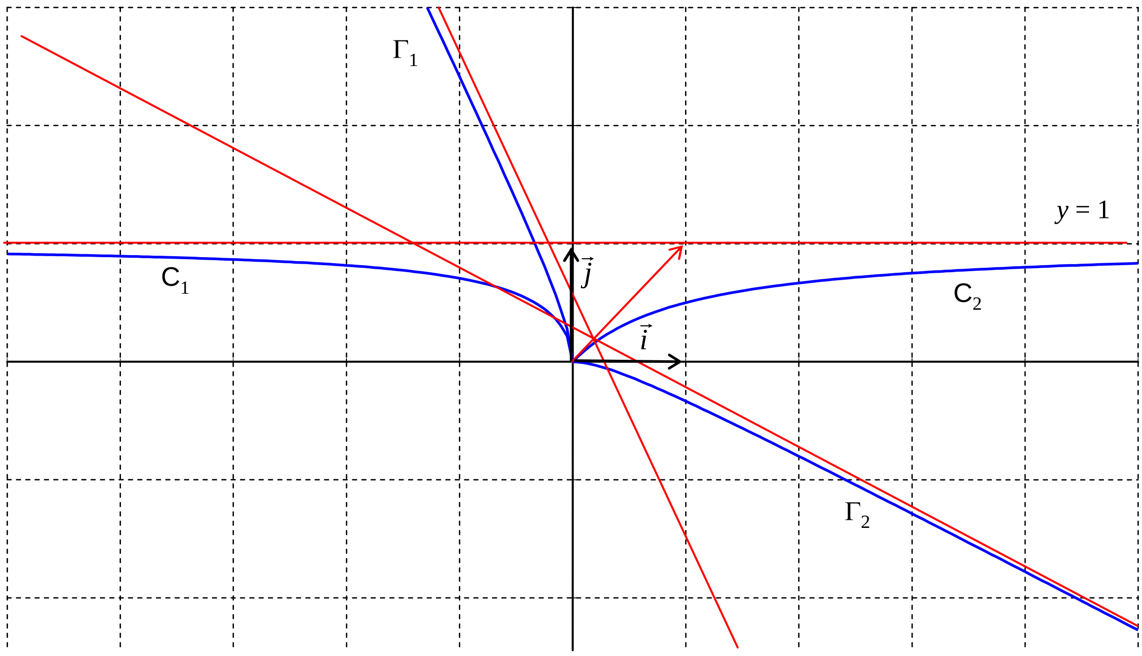
COMPOSÉES ET RÉCIPROQUES

Objectif	*Mettre en œuvre les concepts de fonction composée et de fonction réciproque.*
Outils	*Théorème de la bijection.* *Sens de variation de la réciproque d'une fonction et de la composée de deux fonctions.*

On se propose d'étudier une fonction définie par intervalles en utilisant les propriétés de sa fonction réciproque



Sont tracées ci-dessus les courbes C_1, C_2, Γ_1, Γ_2, représentations respectives, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty ; 0] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} [0 ; +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}$$

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty ; 0] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & -x+\sqrt{x^2-x} \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} [0 ; +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-x^2}{2x+1} \end{array}$$

Le but de ce problème est de mettre en évidence certaines relations entre ces fonctions, mettant en jeu la composition ou le passage à la fonction réciproque, et d'étudier certaines propriétés de Γ_1 et Γ_2.

1. a. Vérifier que, pour tout x de $]-\infty\ ;0]$, on a $f_1(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x-1}}$.

   En déduire le sens de variation de f_1, puis que f_1 réalise une bijection de $]-\infty\ ;0]$ sur $[0\ ;1[$.

   b. Soit f_1^{-1} la fonction réciproque de f_1. Déterminer $f_1^{-1}(y)$, pour tout y de $[0\ ;1[$.

   c. Vérifier que, pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $f_2(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$.

   En déduire le sens de variation de f_2, puis que f_2 réalise une bijection de $[0\ ;+\infty[$ sur $[0\ ;1[$.

   d. Soit f_2^{-1} la fonction réciproque de f_2. Déterminer $f_2^{-1}(y)$, pour tout y de $[0\ ;1[$.

2. a. Démontrer que $\varphi_1=f_2^{-1}\circ f_1$ et que $\varphi_2=f_1^{-1}\circ f_2$.

   b. En déduire le sens de variation de φ_1 et celui de φ_2.

   c. Démontrer que les fonctions f_1 et φ_1 sont réciproques l'une de l'autre. Qu'en déduit-on pour leurs courbes représentatives Γ_1 et Γ_2 ?

3. a. Déterminer les réels α, β et γ tels que, pour tout réel x de $[0\ ;+\infty[$, on ait $\varphi_2(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{2x+1}$

   En déduire que Γ_2 admet pour asymptote une droite Δ_2 que l'on précisera.

   b. On note s la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=x$. On admet le résultat suivant : si une courbe C admet pour asymptote une droite Δ, alors la courbe s(C) admet pour asymptote la droite $s(\Delta)$.

   Démontrer alors que Γ_1 admet pour asymptote une droite Δ_1 que l'on précisera.

   c. g_1 désigne la fonction affine telle que $y=g_1(x)$ soit l'équation réduite de Δ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Retrouver le résultat démontré au b en démontrant que $\lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi_1(x)-g_1(x))=0$.

   INDICATION
   Démontrer que, pour tout réel x supérieur à 1 :
   $\varphi_1(x)-g_1(x)=x\left(1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)-\dfrac{1}{2}$ puis utiliser une expression conjuguée.

4. a. Démontrer que Γ_2 admet l'axe des abscisses pour tangente au point origine.

   b. s étant la réflexion définie à la question 3.b., on admet que, si une courbe représentative C admet la droite Δ pour tangente en M, alors la courbe s(C) admet la droite $s(\Delta)$ pour tangente en s(M).

   Déduire de ce résultat la tangente à Γ_1 au point origine.