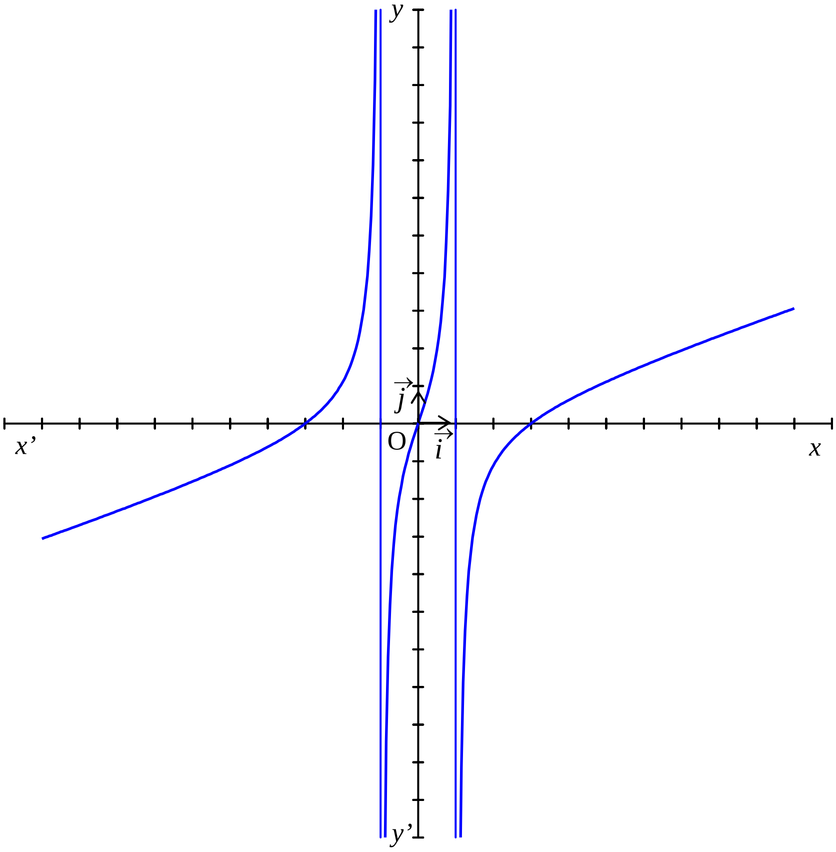
DE COURBES EN COURBE

Objectif	*Terminale scientifique.* *Se familiariser avec les notions de fonction réciproque et de composée, y compris sous l'aspect graphique.*
Outils	*Fonctions réciproques, fonctions composées.* *Représentation graphique des fonctions composées.*

On se propose de construire, dans un cas particulier, la représentation graphique d'une fonction non définie explicitement.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}-\{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x)=\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+1}\right)$ dont voici, ci-dessous, la courbe représentative dans un repère orthonormal.



1. Démontrer que f est impaire. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2. On désigne par F la restriction de f à l'intervalle $]-1\ ;\ 1\ [$.
   a. Démontrer que F est une bijection de $]-1\ ;\ 1\ [$ sur **R**.
   b. Soit F^{-1} la réciproque de F. Sans la calculer, démontrer que F^{-1} est impaire.

3. Pour a élément de **R**–$\{-1\ ;\ 1\}$, on considère l'équation $f(x) = f(a)$ notée (E).
   a. Grâce aux variations de f, démontrer que cette équation possède exactement trois solutions que l'on comparera aux nombres -1 et 1.
   b. Vérifier que, pour tout x de **R**–$\{-1\ ;\ 1\}$, on a :
   $$f(x) - f(a) = \frac{1}{3}(x-a)\cdot\frac{\left[(a-1)x+3+a\right]\left[(a+1)x+3-a\right]}{(a+1)(a-1)(x+1)(x-1)}$$
   En déduire la résolution de l'équation. (E).

4. Soit u et v les fonctions définies par : $u(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ pour $x \neq -1$ et $v(x) = \dfrac{-(x+3)}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
   a. Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, tracer la courbe représentative (C_u) de u.
   b. Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, $v(x) = -u(-x)$.
   Interpréter graphiquement cette relation et en déduire le tracé de la courbe représentative (C_v) de v dans le même repère.
   c. À l'aide de la question 3.a, expliquer pourquoi la réunion (U) des courbes (C_u) et (C_v) n'a pas de point dans le carré défini par $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$ et pourquoi, pour chaque nombre réel a strictement supérieur à 1, ou strictement inférieur à -1, (U) possède un seul point d'abscisse a dans la bande définie par $-1 < y < 1$.

5. Soit φ la fonction définie sur **R** – $\{-1\ ;\ 1\}$ par $\varphi(x) = F^{-1}(f(x))$ et (Φ) sa courbe représentative dans le repère précédent.
   a. Pour a élément de **R** – $\{-1\ ;\ 1\}$, à quel ensemble appartient $\varphi(a)$?
   b. Tracer la courbe représentative de la restriction de (Φ) à l'intervalle $]-1\ ;\ 1\ [$.
   c. À l'aide des courbes (C_u) et (C_v), achever la construction de (Φ).