Fonctions carrément associées

Objectif	*Étudier une équation fonctionnelle se rattachant à une construction géométrique, en s'appuyant sur les résultats de l'ensemble du programme d'analyse.*
Outils	*Théorème de bijection sur un intervalle ouvert. Monotonie . Théorème des valeurs intermédiaires. Réciproque d'une bijection. Sens de variation de la bijection réciproque.*

Soit f est une fonction définie et continue sur **R** et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit M un point de $\mathcal{C}$, H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(\mathrm{O}; \vec{i})$, H' et M' les points tels que $MHH'M'$ soit un carré de sens direct.

Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, M' décrit une courbe $\mathcal{C}'$. On va tenter de répondre aux questions suivantes :

– Est-ce que $\mathcal{C}'$ est la courbe représentative d'une fonction g ?

– Si oui, est-ce que g est définie pour tout réel ?

A. Explorations graphiques sur des exemples

1. On pose $f(x) = 3x + 1$. Construire point par point $\mathcal{C}$ puis $\mathcal{C}'$.

   Grâce au graphique, émettre une conjecture sur l'existence d'une fonction g et, si g existe, sur son ensemble de définition.

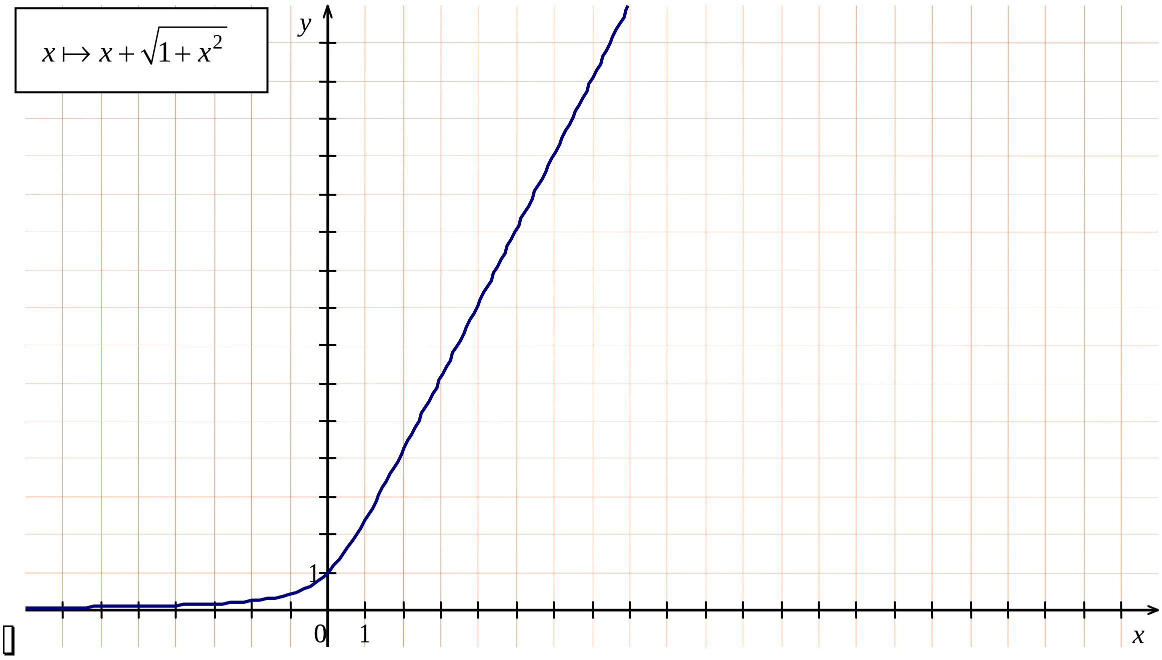
2. On pose $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. On donne ci-après sa représentation graphique.
   Esquisser $\mathcal{C}'$.
   Semble-t-il exister une fonction g dont $\mathcal{C}'$ soit la représentation graphique ?
   Si oui, quel est l'ensemble de définition de g ?

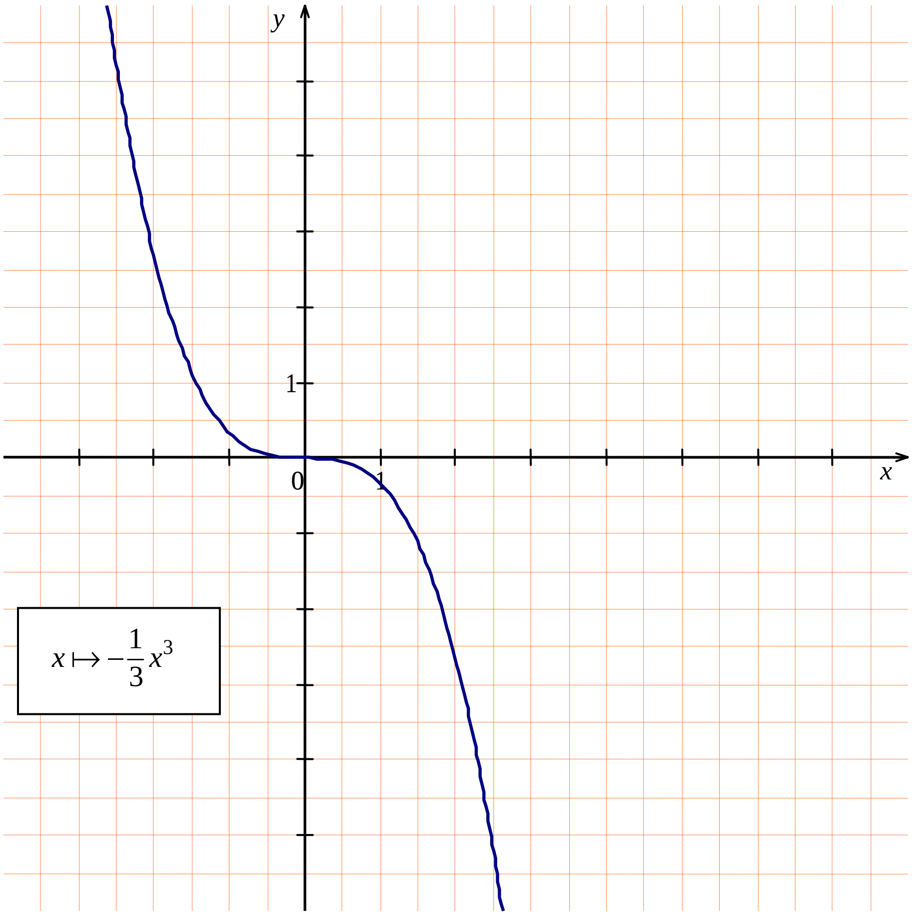
3. On pose $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3$. On donne ci-après sa représentation graphique.

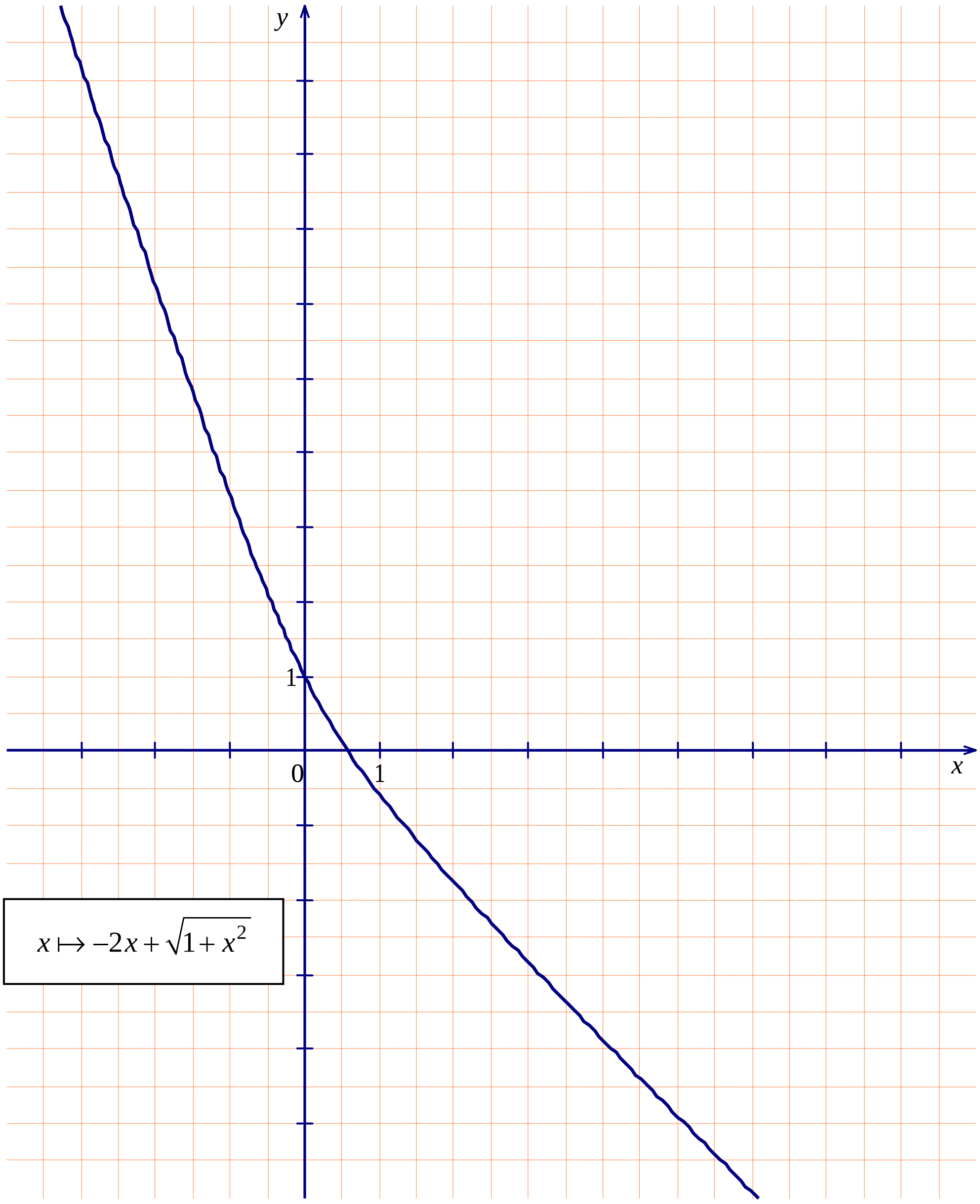
   Répondre aux mêmes questions que précédemment

4. On pose $f(x) = -2x + \sqrt{1+x^2}$. On donne ci-après sa représentation graphique.

   Répondre aux mêmes questions que précédemment


$x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$
y
1
0
1
x


y
1
0
1
x
$x \mapsto -\frac{1}{3}x^3$


y
1
0
1
x
$x \longmapsto -2x+\sqrt{1+x^2}$

B. Traduction du problème en une condition sur g

1. a. Démontrer que, si M a pour abscisse x, M' a pour coordonnées $(x + f(x)\ ;\ f(x)\ )$.

   b. En déduire que $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles qu'il existe un réel x vérifiant $\begin{cases} x' = x + f(x) \\ y' = f(x) \end{cases}$.

   c. On note Φ la fonction définie sur 3 par $\Phi(x) = x + f(x)$.

   Démontrer que $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique d'une fonction g si et seulement si :

   - g est définie sur $\Phi(3)$, et
   - pour tout réel x, $g(x + f(x)) = f(x)$. On note (C) cette condition.

   Le problème se ramène donc, pour une fonction f définie continue sur 3, à déterminer $\Phi(3)$, puis à étudier l'existence d'une fonction g vérifiant la condition (C).

2. Application aux fonctions affines.

   On pose $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux constantes réelles.

   a. Démontrer que, si $a = -1$, aucune fonction g ne vérifie la condition (C).

   b. Démontrer que, si $a \neq -1$, alors la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction g, définie sur 3, que l'on déterminera.

   > Aide
   > On pourra utiliser la variable $X = (a + 1) + b$.

   c. Déterminer la fonction g dans le cas où $f(x) = 3x + 1$.

C. Étude du cas particulier où la fonction f est croissante

On suppose que la fonction f est croissante sur 3.

1. a. Démontrer que Φ est continue et strictement croissante sur 3.

   b. Pour x positif, comparer $f(x) + x$ et $f(0) + x$. En déduire la limite de Φ en $+\infty$.

   c. Par un raisonnement analogue, déterminer la limite de Φ en $-\infty$.

   d. Démontrer que Φ est bijective de 3 sur 3. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.

2. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}'$ représente une fonction g, définie sur 3, que l'on exprimera en fonction de f et de Φ^{-1}.

3. On pose $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

   a. Démontrer que f est strictement croissante sur 3.

   b. Démontrer que Φ^{-1} est définie, pour tout réel y, par $\Phi^{-1}(y) = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}\sqrt{y^2 + 3}$.

   c. Grâce à la relation $\Phi(\Phi^{-1}(x)) = x$, démontrer que, pour tout réel x, $\sqrt{1 + \Phi^{-1}(x)} = x - 2\,\Phi^{-1}(x)$.

   d. Soit g la fonction représentée par $\mathcal{C}'$. Déduire des questions précédentes l'expression de $g(x)$ pour tout réel x.

D. Discussion sur l'existence d'une fonction g et son ensemble de définition à partir des propriétés de Φ

On ne suppose plus obligatoirement que f est croissante.

1. Cas où Φ n'est pas strictement monotone.
   a. On admet qu'il existe alors des réels a, b et c tels que $a < b < c$, et tels que $(\Phi(b) - \Phi(a))$ et $(\Phi(c) - \Phi(b))$ soient de signes contraires.

      En considérant la fonction Ψ : $t \mapsto \Phi[(1 - t)a + tb] - \Phi[(1 - t)b + tc]$ et en calculant $\Psi(0)$ et $\Psi(1)$, démontrer qu'il existe deux réels α et β distincts tels que $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$.

   b. Démontrer que $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

      En déduire qu'il n'existe pas de fonction g vérifiant la condition (C).

   c. Vérifier que, dans l'exemple de la question A.3., la fonction Φ n'est pas monotone.

2. Cas où Φ est strictement monotone.
   a. Démontrer alors que Φ est une bijection de 3 sur $\Phi(3)$.
   b. Soit Φ^{-1} sa bijection réciproque, de $\Phi(3)$ sur 3.

      Démontrer que la courbe $\mathcal{C}'$ représente une fonction g, définie sur $\Phi(3)$, que l'on exprimera en fonction de f et de Φ^{-1}.

3. Un exemple avec Φ strictement décroissante.

   On se place dans le cadre de l'exemple de la question A.4.

   a. Démontrer que Φ est strictement décroissante (on pourra admettre que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ admet comme dérivée sur 3 $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).
   b. Déterminer $\Phi(3)$, puis la fonction réciproque de Φ, notée Φ^{-1}.
   c. Déterminer la fonction g, après avoir démontré, à partir de l'égalité $\Phi(\Phi^{-1}(x)) = x$, que, pour tout réel x de $\Phi(3)$, $\sqrt{1+\Phi^{-1}(x)} = x + \Phi^{-1}(x)$.

Annexe 1. Illustration informatique

Il est intéressant d'obtenir conjointement, avec GÉOPLAN, les tracés des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ pour diverses formes de la fonction f.

Afin d'obtenir un imagiciel très rapidement modifiable, on peut :

----- OBJETS PREDEFINIS -----
O origine du repère R_{oxy}
ox droite portant l'axe des abscisses de R_{oxy}
oy droite portant l'axe des ordonnées de R_{oxy}
R_{oxy} repère orthonormal
$\vec{\imath}$ premier vecteur de base de R_{oxy}
$\vec{\jmath}$ second vecteur de base de R_{oxy}
U_{oxy} unité de longueur liée au repère R_{oxy}
t_{ime} représente l'heure (en secondes)
----- OBJETS CONSTRUITS -----
f fonction: x|->0.5x+sinx
A point libre sur la droite ox
a abscisse de A (repère R_{oxy})
B point libre sur la droite ox
b abscisse de B (repère R_{oxy})
C_f graphe de f sur [a,b] (300 points, repère R_{oxy})
X point libre sur le segment [AB]
x abscisse de X (repère R_{oxy})
M point de coordonnées (x,f(x)) dans le repère R_{oxy}
H projeté orthogonal de M sur ox
M' image de H par la rotation de centre M et d'angle 90 (degré)
H' projeté orthogonal de M' sur ox
Segment [MH]
Segment [HH']
Segment [H'M']
Segment [M'M]
C_g lieu du point M', pilote X (300 points)

① Définir la fonction proposée

② Le logiciel ne permet de tracer la courbe que sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. Pour pouvoir modifier a et b avec la souris, on peut créer deux points A et B libres sur l'axe des abscisses, puis définir a et b comme abscisses de A et B. En bougeant A et B on modifie a et b.

③ Créer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction proposée sur $[\,a\,;\,b\,]$

④ Créer un réel libre, x, sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, ou, mieux, un point libre X sur le segment [AB] puis définir son abscisse x.

⑤ Créer le point M $(x\,;\,f(x))$

⑥ Créer le point H, projection orthogonale de M sur l'axe des abscisses, le point M', image de H par la rotation de centre M et d'angle 90°, le point H', projection orthogonale de M' sur l'axe des abscisses ; enfin tracer le carré MHH'M'.

⑦ Tracer le lieu de M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

Les illustrations qui suivent ont été obtenues à partir de cet imagiciel en modifiant seulement la fonction f.

Outre les exemples proposés dans cette séquence, on peut étudier différents cas :

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = x + 1$;

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = 1$;

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = -x + 1$;

$\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = -2x + 1$;

$\mathcal{C}$ est le demi-cercle « positif » de centre O et de rayon 1 ;

$\mathcal{C}$ est la parabole d'équation $y = x^2$;

$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction partie entière ;

$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction sinus ;

$\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \sin x$.

Annexe 2. Un exemple avec f non monotone

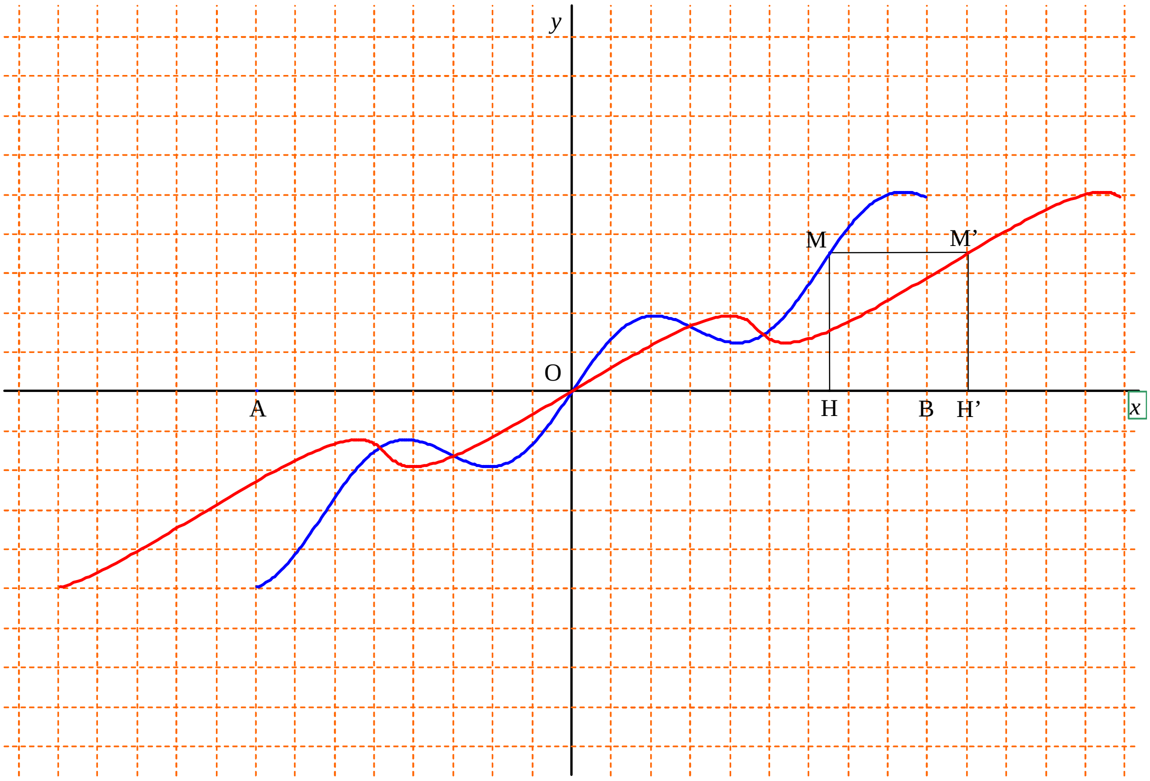
On considère la fonction f définie sur 3 par $f(x) = 0{,}5\,x + \sin(x)$.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f et la courbe $\mathcal{C}'$ correspondante.

On peut démontrer que la fonction Φ correspondante est strictement croissante sur 3, et donc que la courbe $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique d'une fonction g. On peut aussi démontrer que g est définie sur 3.

On remarquera que dans ce cas ni f ni g ne sont monotones.

Expliciter la fonction g serait difficile ici. Les cas étudiés plus haut, où l'on peut trouver des expressions pour les fonctions Φ et g sont exceptionnellement favorables.



Annexe 3. Autre version du problème

On peut poser le problème en remplaçant les fonctions par :

dans la question A.2 : $f(x) = \ln(1 + e^{x})$

dans la question A.4. : $f(x) = -x + e^{-x}$.

Annexe 4. Courbes obtenues dans la partie A