LA MONOTONIE A SES LIMITES

Objectif	*Utiliser le théorème sur les fonctions monotones bornées pour démontrer l'existence de limites.*
Outils	*Existence d'une limite pour une fonction monotone bornée.* *Fonctions exponentielles de base a.*

On se propose d'étudier une fonction pour laquelle l'existence de limites est obtenue grâce au théorème sur les fonctions monotones bornées. La fonction étudiée ici associe à tout réel a de $]\,1\,;\,\mathrm{e}\,[$ (ou de $]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$) l'unique solution de l'équation $a^x = x+1$. Cette fonction est décroissante et minorée et, par suite, admet une limite finie lorsque a tend vers e (ou, suivant le cas, $+\infty$), limite que l'on peut calculer.

A. Approche graphique

Pour tout réel a de l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$, on note Γ_a la représentation graphique, dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ du plan, de la fonction $\exp_a$ définie, pour tout réel x, par $\exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a)$.

On a représenté sur la figure les courbes Γ_a pour a appartenant à $\mathrm{V} = \{\,1{,}5\,;\,1{,}8\,;\,2\,;\,2{,}3\,;\,3{,}5\,;\,4\,;\,5\,\}$ et la droite Δ d'équation $y = x + 1$. On a aussi tracé la droite D d'équation $y = x$ et les droites d'équations $y = -1$ et $x = 1$.

On s'intéresse à la résolution de l'équation $a^x = x + 1$, notée (E_a).

Le graphique semble faire apparaître que, pour tout a élément de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, (E_a) admet une unique solution non nulle. On admet provisoirement ce résultat, dans cette partie A, et on note f la fonction qui, à tout élément a de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, associe la solution unique de (E_a). On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Associer à chaque courbe Γ_a tracée sur la figure la valeur de a correspondante. Écrire à côté de chaque courbe son équation.
2. Pour chacune des valeurs a appartenant à V, placer $f(a)$ sur l'axe des abscisses, puis, grâce à la droite D, placer $f(a)$ sur l'axe des ordonnées ; enfin, construire le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.
3. Conjecturer, d'après ces quelques points, le tableau de variations de f, y compris les limites.

> Les parties suivantes ont pour but de vérifier cette conjecture.
> On s'intéresse pour cela à la fonction g_a donnant l'écart algébrique, à une abscisse donnée, entre Γ_a et Δ : pour tout a de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, g_a est définie sur 3 par $g_a(x) = a^x - (x+1)$.

B. Étude des fonctions g_a

1. Pour a élément de $]\,1\,;+\infty\,[\,\setminus\{\mathrm{e}\}$, étudier les variations de g_a.
   Démontrer que g_a admet un minimum en un réel α_a que l'on exprimera en fonction de a.
2. Étudier les limites de g_a en $+\infty$ et en $-\infty$. Dresser le tableau de variation de g_a.

C. Solution non nulle de l'équation (E_a) pour $a \in]\,1\,;\,e\,[$

Soit a un élément de $]\,1\,;\,e\,[$.

1. a. Démontrer que, dans ce cas, α_a est strictement positif.

   Calculer $g_a(0)$ et en déduire le signe de $g_a(\alpha_a)$.

   b. Démontrer que l'équation (E_a) admet une unique solution non nulle.

   On note cette solution $f(a)$. On définit ainsi la fonction f sur l'intervalle $]\,1\,;\,e\,[$.

2. a. Soit a et a' deux nombres tels que $1 < a < a' < e$.

   Démontrer que $g_a(f(a')) - g_a(f(a)) = a^{f(a')} - a'^{f(a')}$.

   Comparer $g_a(f(a'))$ et $g_a(f(a))$, puis $f(a')$ et $f(a)$.

   b. En déduire le sens de variation de f sur $]\,1\,;\,e\,[$.

3. a. Déduire de la question précédente que $f(a)$ admet une limite finie ℓ lorsque a tend vers e par valeurs inférieures.

   b. Démontrer que ℓ vérifie l'équation $e^{\ell} = \ell + 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

   c. En remarquant que $f(a) \geq \alpha_a$ pour a élément de $]\,1\,;\,e\,[$, déterminer la limite de f en 1.

D. Solution non nulle de l'équation (E_a) pour $a \in]\,e\,;\,+\infty\,[$

Soit a élément de $]\,e\,;\,+\infty\,[$.

1. a. Démontrer que dans ce cas α_a est strictement négatif.

   Calculer $g_a(0)$ et en déduire le signe de $g_a(\alpha_a)$.

   b. Démontrer que l'équation (E_a) admet une unique solution non nulle.

   On note de nouveau cette solution $f(a)$. On a ainsi prolongé la fonction f à l'intervalle $]\,e\,;\,+\infty\,[$. f est donc définie sur l'ensemble $]\,1\,;\,+\infty\,[\,\setminus\{e\}$ et associe à tout réel a l'unique solution non nulle de l'équation (E_a).

2. Par une méthode analogue à celle utilisée dans la question C.2., démontrer que f est strictement décroissante sur $]\,e\,;\,+\infty\,[$.

3. a. En déduire que $f(a)$ admet une limite finie lorsque a tend vers e par valeurs supérieures.

   b. Déterminer cette limite.

   c. Définir le prolongement par continuité de f en e.

4. a. Démontrer que f admet une limite finie L en $+\infty$, et que L est strictement négative.

   b. Démontrer que $L = -1$.

E. Bilan

Le tableau de variation conjecturé dans la partie A s'est-il révélé exact ?