MONOTONIE SUR UNE RÉUNION D'INTERVALLES

Objectif	*Étudier les variations d'une fonction sur la réunion de deux intervalles à partir de ses variations sur chacun d'eux.*
Outils	*Monotonie* *Continuité en un point.* *Passage à la limite d'une inégalité large.*

Si f est une fonction croissante (respectivement décroissante) à la fois sur un intervalle I et un intervalle J non vides, alors f est-elle une fonction croissante (respectivement : décroissante) sur l'ensemble $\mathrm{K} = \mathrm{I} \cup \mathrm{J}$?

A. Un exemple

On rappelle que la fonction « partie entière » E associe à tout réel x le plus grand des entiers relatifs inférieurs ou égaux à x ; c'est à dire : $\begin{array}{c} \mathbf{R} \to \mathbf{Z} \\ \mathrm{E} : x \mapsto n \end{array}$ tel que $n \leq x < n+1$

Soit f et g les fonctions définies sur $[-2\,;0\,[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ et $g(x) = x \times \mathrm{E}(x)$.

1. Prouver que f et g sont monotones sur $[-2\,;-1\,[$, sur $[-1\,;0\,[$.
   Représenter f et g sur deux figures distinctes.
2. a. f est-elle croissante sur $[-2\,;0\,[$? (Calculer $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ et $f(-1)$).

   b. g est-elle décroissante sur $[-2\,;0\,[$?

B. Cas où $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} \neq \varnothing$

On suppose qu'il existe une réel α commun à deux intervalles I et J (donc la réunion de I et J est un intervalle K).

1. Prouver que, si f est une fonction définie et croissante à la fois sur I et sur J, alors f est croissante sur K.

> AIDE:
> Prendre x_1 et x_2 quelconques dans K tels que $x_1 < x_2$ et comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en envisageant chacun des trois cas suivants:
> - $x_1 \leq \alpha$ et $x_2 \leq \alpha$;
> - $x_1 \geq \alpha$ et $x_2 \geq \alpha$;
> - $x_1 \leq \alpha \leq x_2$.

2. Établir un résultat analogue quand f est une fonction définie et décroissante sur I et sur J.

3. Énoncer le théorème démontré.

C. Cas où $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J$ est un intervalle

1. f est une fonction définie et croissante sur $I = [\, a\,;\, b\,[$ et sur $J = [\, b\,;\, c\,]$.
   a. Conjecture

      Quelle hypothèse supplémentaire peut-on ajouter sur la fonction f pour qu'elle soit croissante sur K ?

   b. Preuve

      On suppose que pour tout réel x de I on a : $f(x) \leq f(b)$. Prouver que f est croissante sur K.

> AIDE
> Prendre x_1 et x_2 quelconques dans K tels que $x_1 < x_2$ et comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en envisageant chacun des trois cas suivants:
> - x_1 et x_2 sont tous les deux dans I ;
> - x_1 et x_2 sont tous les deux dans J ;
> - x_1 est dans I et x_2 est dans J.

2. Cas particulier : la fonction f est continue en b.

   On suppose que :
   - f est définie et croissante sur $I = [\, a\,;\, b\,[$ et sur $J = [\, b\,;\, c\,]$;
   - f est continue en b.

   a. Démontrer que, pour tout réel x de I, on a : $f(x) \leq f(b)$.

   > On pourra utiliser le fait que pour tout $x' \in [\, x\,;\, b\,[$, $f(x) \leq f(x')$

   b. Énoncer le théorème démontré.

D. Cas où $I \cup J$ n'est pas un intervalle

On donne la définition suivante :

Soit A une partie de **R**, qui n'est pas nécessairement un intervalle.

On dit que f est croissante (respectivement décroissante) sur A si, quels que soient x_1 et x_2 de A, tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivement: $f(x_1) \geq f(x_2)$).

1. Contre-exemple

   La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est elle décroissante sur $[\, -1\,;\, 0\,[$ et sur $]\, 0\,;\, 1\,]$? f est-elle décroissante sur $[\, -1\,;\, 0\,[\cup]\, 0\,;\, 1\,]$?

> On pourra s'aider d'une représentation graphique de f.

2. Conjecture

   f est une fonction définie et croissante sur chacun des intervalles I et J avec $K = I \cup J$ qui n'est pas un intervalle.

   Quelle hypothèse supplémentaire peut-on ajouter sur la fonction f pour qu'elle soit croissante sur K ?

3. Preuve

   On suppose que pour tout réel x de I et tout réel y de J on a $f(x) \leq f(y)$.

   En envisageant plusieurs cas, prouver que f est croissante sur K.

> AUTRE FORMULATION DE L'HYPOTHÈSE SUPPLÉMENTAIRE
> $f(I)$ admet une borne supérieure r , $f(J)$ admet une borne inférieure s , et $r \leq s$.