LA TORTUE ET LE LAPIN D'ALICE

Objectif	*Résoudre un problème du type « plaisant et délectable ».*
Outils	*Théorème des valeurs intermédiaires*

Alice ne trouva pas non plus très extraordinaire d'entendre le Lapin marmonner « Oh ! Mon Dieu, mon Dieu ! Je vais être en retard. » (…) En revanche, quand elle vit le Lapin tirer une montre de la poche de son gilet, regarder l'heure puis partir en courant, Alice bondit, car elle venait de comprendre dans un éclair qu'elle n'avait jamais vu un lapin tirer une montre de la poche de son gilet.

Alice au pays des merveilles
Lewis Carroll

Pourquoi une montre ? Alice ne sait pas que le Lapin en a besoin car il a rendez-vous avec la Tortue de la fable pour pique-niquer à la campagne …

Lors de cette promenade champêtre, le Lapin et la Tortue ont décidé de partir ensemble du lieu de rendez-vous et, suivant un même chemin, de se retrouver à un endroit convenu riche en laitues et carottes sauvages. Mais dame Tortue avance uniformément à son train de sénateur (50 mètres par heure). Le Lapin trouvant sa compagne trop lente, part devant, en suivant le chemin, puis revient à la Tortue, repart vers le but, recommence son manège… Joueur invétéré, il fait le pari suivant :

« Foi de Lapin ! j'arriverai au but au même instant que dame Tortue mais je ne réaliserai une vitesse moyenne égale à la sienne sur aucun des intervalles de temps d'une heure. »

Le pari du Lapin est-il tenable ?

Pour tenter de répondre à cette question, on considère la fonction L donnant la position du lapin par rapport au point de départ (en mètres), en fonction du temps écoulé depuis le départ (en heures). L est évidemment une fonction continue (abscisse du lapin sur une trajectoire). On note D la durée, en heures, de la promenade, identique pour les deux animaux ; on suppose que D est strictement supérieur à 1.

A. Propriété de l'écart Lapin-Tortue

1. Exprimer le projet du Lapin en conditions sur la fonction L.

2. On note $f(t)$ l'écart, à l'instant t, entre le Lapin et la Tortue.
   Exprimer $f(t)$ en fonction de $L(t)$.
   Traduire le projet du Lapin en conditions sur la fonction f.

B. Où D est entier

On suppose dans cette partie que D est un entier strictement supérieur à 1.

Soit g la fonction définie sur $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$ par $g(t) = f(t+1) - f(t)$.

1. a. Démontrer que $g(0) + g(1) + ... + g(D-1) = 0$.

   b. En déduire que, si $g(k)$ est positif (resp. négatif) pour tout entier k de $\{\ 0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ D-1\ \}$, alors $f(0) = f(1) = \ldots = f(k) = f(D)$.

   Calculer alors la vitesse moyenne du lapin entre les instants k et $k+1$, pour k entier, élément de $\{\ 0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ D-1\ \}$

2. Démontrer que, s'il existe des entiers i et j appartenant à $\{\ 0\ ;\ 1\ ;\ \ldots\ ;\ D-1\ \}$, avec $i < j$ et tels que $g(i)\, g(j) < 0$, alors il existe un réel t_0, élément de $[\ i\ ;\ j\ ]$, tel que $f(t_0+1) - f(t_0) = 0$.

   Déterminer alors la vitesse moyenne du lapin entre les instant t_0 et $t_0 + 1$

3. Conclure quant au pari du Lapin lorsque D est un entier strictement supérieur à 1.

C. Où le pari est tenu

On considère D non entier ; par exemple $D = 4{,}3$.

On se propose de construire une loi horaire du lapin, affine par intervalle, lui permettant de tenir son pari.

On pose d'abord, par exemple, pour tout entier n élément de $\{0\,,1\,,2\,,3\,,4\}$, $f(n) = 50\,n$ et $f(4{,}3-n) = -50\,n$.

1. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (4 cm pour une heure sur l'axe des abscisses ; 4 cm pour 100 m sur l'axe des ordonnées).

   a. Placer les points de $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de n données ci-dessus.

   b. On définit f comme la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est la réunion des segments joignant, dans l'ordre des abscisses croissantes, les points considérés précédemment. Tracer alors $\mathcal{C}$.

   c. Soit h la fonction définie sur $[\ 0\ ;\ 3{,}3\ ]$ par $h(t) = f(t+1)$. Tracer dans le même repère la courbe $\mathcal{C}'$ représentant h. Constater graphiquement que, pour tout réel t de $[\ 0\ ;\ 3{,}3\ ]$, $f(t) < f(t+1)$.

   d. Démontrer ce résultat, en considérant la fonction g définie sur $[\ 0\ ;\ 3{,}3\ ]$ par $g(t) = f(t+1) - f(t)$.

   (On pourra d'abord déterminer $g(n)$ et $g(4{,}3-n)$ pour tout entier n élément de $\{\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ \}$ puis démontrer que g est constante sur chacun des intervalles $[\ n\ ;\ n+0{,}3\ ]$ et $[\ n+0{,}3\ ;\ n+1\ ]$, pour tout entier n élément de $\{\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ \}$).

2. Soit L la fonction définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 4{,}3\ ]$ par $L(t) = f(t) + 50\,t$

   a. Vérifier que cette fonction L est une loi horaire du lapin réalisant son projet pour une durée commune de promenade $D = 4{,}3$.

   b. Tracer sur un nouveau graphique, avec les mêmes unités, les courbes représentatives de T, loi horaire de la tortue, ainsi que de L.

   c. Vérifier graphiquement que le lapin rencontre deux fois la tortue au cours de chacun des intervalles de temps $[\ 1\ ;\ 2\ ]$, $[\ 2\ ;\ 3\ ]$, $[\ 3\ ;\ 4\ ]$.

> REMARQUE
> La construction qui vient d'être faite d'une loi horaire réalisant le projet du lapin peut facilement s'adapter à toute valeur non entière de D.

D. Où l'on démontre que, s'il tient son pari, le lapin croise souvent la tortue

Dans cette partie on suppose le lapin tient son pari et que D est un réel non entier strictement supérieur à 1. La fonction f est celle qui a été définie dans la partie A.

1. Démontrer que l'on est dans l'un des cas suivants :

   – ou bien, pour tout t de $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$, $f(t) < f(t+1)$,

   – ou bien, pour tout t de $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$, $f(t) > f(t+1)$.

   (On pourra considérer la fonction g définie sur $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$ par $g(t) = f(t+1) - f(t)$).

On suppose dans la suite que, pour tout t appartenant à $[\ 0\ ;\ D-1\ ]$, on a $f(t) < f(t+1)$ (l'autre cas se traiterait de façon similaire).

2. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est l'entier naturel p tel que $p \leq x < p+1$. On note $N = E(D)$.

   On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n de $[\ 0\ ;\ N\ ]$ par : $u_n = n$ et $v_n = D - n$ (aux instants u_n, un nombre entier d'heures s'est écoulé depuis le départ ; aux instants v_n, il va s'écouler un nombre entier d'heures jusqu'à l'arrivée).

   a. Démontrer que, sur $[\ 0\ ;\ N\ ]$, la suite $(f(u_n))$ est strictement croissante et la suite $(f(v_n))$ strictement décroissante.

   b. En déduire le signe de $f(u_n)$ et $f(v_n)$ pour n entier appartenant à $[\ 0\ ;\ N\ ]$.

3. On suppose N supérieur ou égal à 3. Pour n entier compris entre 1 et $N-1$, on pose $k = E(D-n)$.

   Démontrer que v_k appartient à l'intervalle $[\ n\ ;\ n+1\ ]$.

   En déduire que le lapin rencontre la tortue au moins deux fois au cours de chacun des intervalles de temps de la forme $[\ n\ ;\ n+1\ ]$, pour tout entier n compris entre 1 et $N-1$. (On pourra considérer les intervalles $[\ n\ ;\ v_k\ ]$ et $[\ v_k\ ;\ n+1\ ]$).

> REMARQUE
> Pour réaliser les conditions de la question 2 sur $f(u_n)$ et $f(v_n)$, écarts avec la tortue à certains instants précis, le lapin doit respecter de strictes contraintes horaires, d'où la nécessité pour lui d'avoir une montre... et la citation d'Alice au Pays des Merveilles, en exergue.

ANNEXES

Graphique de la partie C