IV – Dérivabilité

UNE ILLUSTRATION GRAPHIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Objectif	*Illustrer graphiquement la définition du nombre dérivé.*
Outils	*Définition du nombre dérivé et de la tangente.*

Il s'agit de donner un sens mathématique et d'illustrer graphiquement la phrase :
« Pour des abscisses suffisamment proches de x_0, une courbe $\mathcal{C}$ est aussi proche qu'on le souhaite de sa tangente Δ en M_0 d'abscisse x_0 ».

A. Rappel de cours

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point, et x_0 un point de I. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$ et soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 .

Les deux propositions suivantes sont équivalentes, m étant un réel :

- la fonction $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet m pour limite en 0
- Il existe un intervalle ouvert J contenant 0 et une fonction ε définie sur J telle que, pour tout h élément de J, $f(x_0+h) = f(x_0) + m\,h + h\,\varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Si l'une des deux propositions précédentes est vraie on dit que :

a. f est dérivable en x_0 et le nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$, est égal à m.

b. $\mathcal{C}$ admet pour tangente au point A la droite Δ passant par A, de coefficient directeur m.

On peut interpréter graphiquement cette dernière définition en disant que : **« Pour des abscisses suffisamment proches de x_0, $\mathcal{C}$ est aussi proche qu'on le souhaite de la tangente Δ ».**

B. Exercice

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un réel, et x_0 un élément de I. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 .

On suppose qu'au point A d'abscisse x_0, $\mathcal{C}$ admet pour tangente une droite Δ de coefficient directeur m. Il existe donc une fonction ε définie sur I telle que : $f(x_0+h) = f(x_0)+mh+h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

De la nullité de cette limite, on déduit que l'on a pour tout entier naturel non nul n : $-\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon(h) \leq \dfrac{1}{n}$, à condition que h soit suffisamment proche de 0. Soit encore : « Pour tout entier naturel non nul n, il existe un réel strictement positif h_n, dépendant de n, tel que : si $-h_n \leq h \leq h_n$ alors $-\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon(h) \leq \dfrac{1}{n}$ ».

1. On pose $n = 2$. Il existe donc un réel strictement positif h_2 tel que :

   si $-h_2 \leq h \leq h_2$ alors $-\frac{1}{2} \leq \varepsilon(h) \leq \frac{1}{2}$.

   En déduire un encadrement de $f(x_0 + h)$ sous la condition $0 \leq h \leq h_2$**.**

2. Déduire de la question précédente que pour tout réel x appartenant à l'intervalle [x_0 ; $x_0 + h_2$], on a :

   $f(x_0) + \left(m - \frac{1}{2}\right)(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + \left(m + \frac{1}{2}\right)(x - x_0)$. On posera : $x = x_0 + h$.

   En déduire que pour des abscisses comprises entre x_0 et $x_0 + h_2$, $\mathcal{C}$ se trouve encadrée par deux droites D_2 et D'_2 passant par A, et dont on précisera les coefficients directeurs.

3. En menant des raisonnements analogues, encadrer $f(x_0 + h)$ sous la condition $-h_2 \leq h \leq 0$, puis encadrer $f(x)$ pour x élément de l'intervalle [$x_0 - h_2$; x_0].

   En déduire que les droites D_2 et D'_2 encadrent $\mathcal{C}$ pour toutes les abscisses comprises entre $x_0 - h_2$ et $x_0 + h_2$.

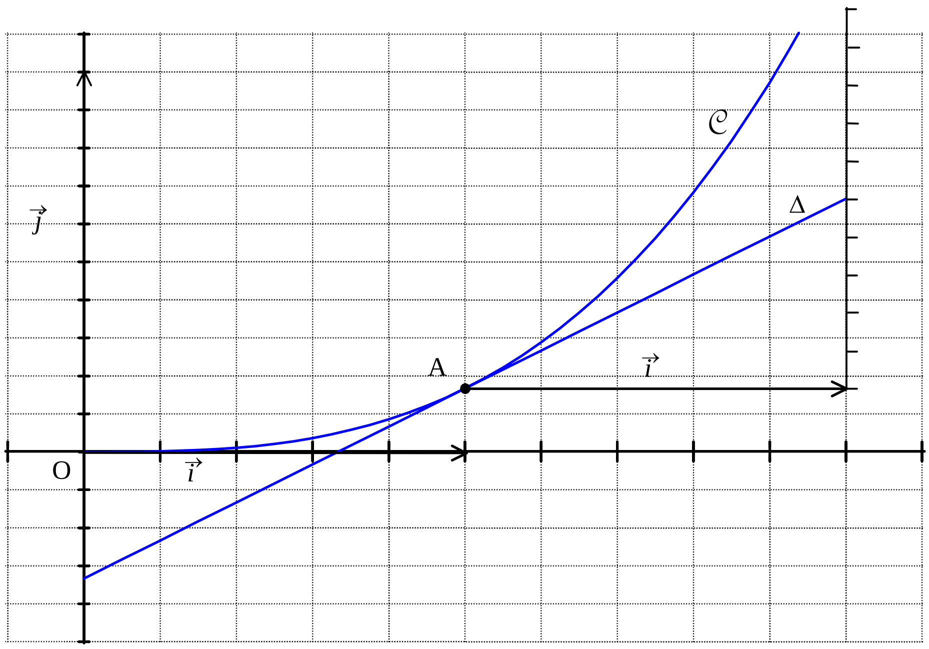
4. Illustration graphique.

   Le graphique ci-dessous représente, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, une fonction f vérifiant, pour $x_0 = 1$, les hypothèses précédentes. La tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est tracée sur ce graphique.

   a. Tracer sur cette figure les droites D_2 et D'_2 définies aux questions précédentes.

   b. Trouver graphiquement quelle valeur on peut prendre pour h_2.

   c. Repasser en couleur les frontières de la partie du plan comprise entre D_2 et D'_2 d'une part, et d'autre part les droites parallèles à (Oy) d'équations : $x = x_0 - h_2$ et $x = x_0 + h_2$.



5. On pose $n = 3$. Il existe donc un réel strictement positif h_2 tel que, si $-h_3 \leq h \leq h_3$, alors $-\frac{1}{3} \leq \varepsilon(h) \leq \frac{1}{3}$.

   a. En déduire un encadrement de $f(x_0 + h)$ sous la condition $0 \leq h \leq h_3$.

   En posant $x = x_0 + h$, en déduire un encadrement de $f(x)$ pour x compris entre x_0 et $x_0 + h_3$.

   En déduire que pour des abscisses comprises entre x_0 et $x_0 + h_3$, $\mathcal{C}$ se trouve encadrée par deux droites D_3 et D'_3 passant par A, et dont on précisera les coefficients directeurs.

   b. Démontrer que les droites D_3 et D'_3 encadrent $\mathcal{C}$ pour toutes les abscisses comprises entre $x_0 - h_2$ et $x_0 + h_2$

   c. Tracer sur cette figure les droites D_3 et D'_3 .

   Trouver graphiquement quelle valeur on peut prendre pour h_3.

   Repasser, avec une nouvelle couleur, les frontières de la partie du plan comprise entre D_3 et D'_3 d'une part, et d'autre part les droites d'équations : $x = x_0 - h_3$ et $x = x_0 + h_3$.

6. a. On pose cette fois $n = 5$, et on ne demande pas de démonstration.

   Tracer les droites D_5 et D'_5 sur le graphique. Quelle valeur peut-on prendre pour h_5 ?

   Repasser d'une nouvelle couleur les frontières de la partie du plan comprise entre D_5 et D'_5 d'une part, et d'autre part les droites d'équations : $x = x_0 - h_5$ et $x = x_0 + h_5$.

   b. Procéder de même pour $n = 10$.

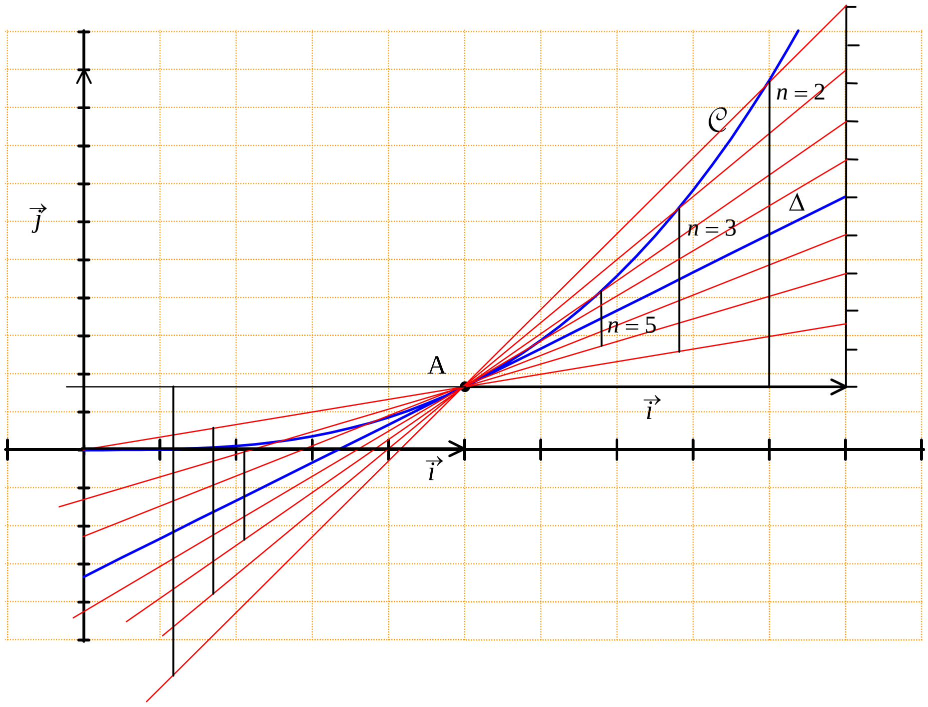
C. Conclusion

En suivant le même schéma de démonstration, on peut établir le résultat suivant :

Soit D et D' deux droites passant par A encadrant la tangente Δ, et de coefficients directeurs aussi proches que l'on veut de celui de Δ. Alors, pour des abscisses suffisamment proches de x_0, $\mathcal{C}$ se trouve entre D et D'.

C'est en ce sens qu'on peut dire : « **pour des abscisses suffisamment proche de x_0, $\mathcal{C}$ est aussi proche qu'on le souhaite de la tangente** Δ ».

DOCUMENT PROFESSEUR



MEILLEURE APPROXIMATION AFFINE

Objectif	*Pour une fonction f dérivable en x_0, démontrer que la fonction affine tangente en x_0 est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0*
Outils	*Définition du nombre dérivé et de la tangente.*

Il s'agit de déterminer la meilleure approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point.

A. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle D, x_0 un réel de D et C la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$.
On appelle approximation affine de la fonction f en x_0 toute fonction affine g telle que $g(x_0) = f(x_0)$.

Soit g_1 et g_2 deux approximations affines de la fonction f en x_0.

On dit que g_1 est « meilleure » que g_2 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que, pour tout x de $\mathrm{I} \cap \mathrm{D}$, on ait $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$ (c'est-à-dire lorsque g_1 est plus « proche » de f que g_2 sur I)[1].

Si f est dérivable en x_0, on appelle fonction affine tangente à f en x_0 la fonction affine dont la représentation graphique dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

B. Exemple 1

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^2 + x$.

1. Déterminer la fonction affine tangente à f en 0. On note g_1 cette fonction.

2. Soit g_2 la fonction affine définie par $g_2(x) = \dfrac{3}{2}x$.

   Démontrer que, pour tout réel x, on a : $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)| \Leftrightarrow |x| \leq \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$.

   En déduire que cette inégalité est vérifiée pour tout x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$. Conclure.

3. Soit g_3 la fonction affine définie par : $g_3(x) = ax$ où a est un réel distinct de 1.

   Démontrer que, pour tout réel x, on a : $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_3(x)| \Leftrightarrow |x| \leq |x + 1 - a|$

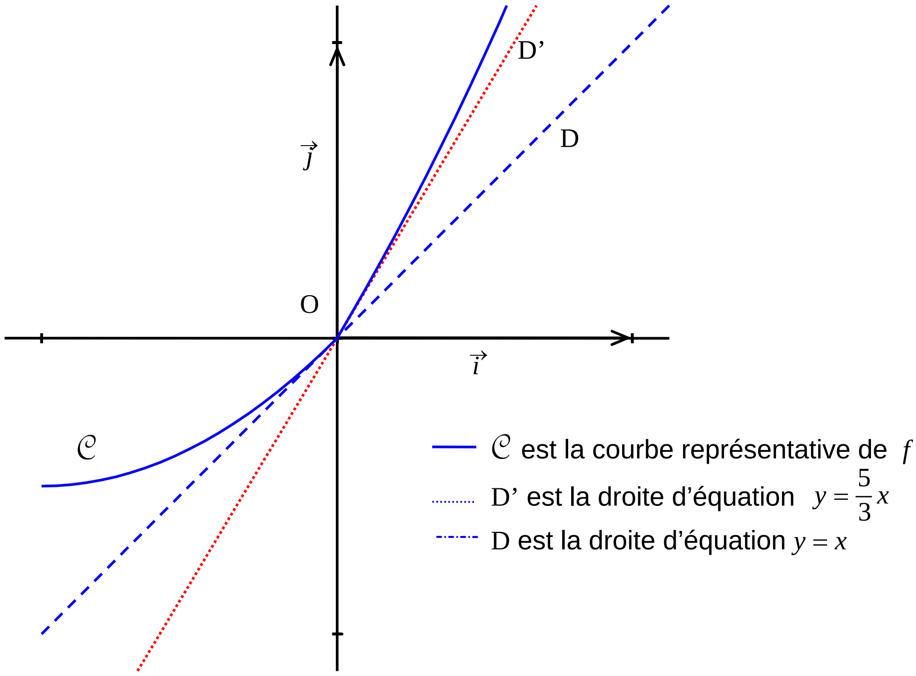
[1] On peut alors démontrer aisément qu'il existe un intervalle ouvert J centré en x_0 où la même inégalité est valable. Si I = **R**, on peut prendre J = **R**. Si I ≠ **R**, on peut prendre pour J l'intervalle centré en x_0 ayant pour rayon la distance de x_0 à la borne la plus proche de x_0. Alors J est inclus dans I et l'inégalité, vraie sur I, est donc vraie sur J.

En déduire que la première inégalité est vérifiée pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\left|\frac{a-1}{2}\right|;\left|\frac{a-1}{2}\right|\right[$.

(On distinguera les cas : $a > 1$ et $a < 1$).

En déduire que g_1 est la meilleure approximation affine de f en 0

4. La représentation graphique suivante est-elle correcte ?



C. Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer la fonction affine tangente à f en 1. On note g_1 cette fonction.

2. Soit g_2 une approximation affine de f en 1, différente de g_1.
   Démontrer qu'il existe un réel a, différent de -1, tel que $g(x) = ax - a + 1$.

3. Démontrer que, pour tout x de $]\,0\,;+\infty\,[$, différent de 1, les affirmations suivantes sont équivalentes :
   $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$
   $|1 + x^2 - 2x| \leq |1 - ax^2 + (a-1)x|$
   $|x-1| \leq |-ax-1|$ (on pourra multiplier les deux membres de cette deuxième inégalité par $|x-1|$, pour montrer qu'elle est équivalente à la première)
   $(x-1)^2 \leq (-ax-1)^2$
   $0 \leq (a+1)[(a-1)x+2]$

4. En déduire que l'inégalité $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$ est vérifiée :

   – pour x élément de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ si $a > 1$,

– pour x élément de l'intervalle $\left]0\,;\frac{2}{(1-a)}\right[$ si $-1<a<1$,

– pour x élément de l'intervalle $\left]\frac{2}{(1-a)}\,;+\infty\right[$ si $a<-1$.

Vérifier que dans les trois cas l'intervalle considéré contient le nombre 1.

5. En déduire que g_1 est la meilleure approximation affine de f en 1.

D. Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Déterminer la fonction affine tangente à f en 1. On note g_1 cette fonction.

2. Soit g_2 une approximation affine de f en 1, différente de g_1.

   Démontrer qu'il existe un réel a différent de $\frac{1}{2}$ tel que $g_2(x)=ax-a+1$.

3. Démontrer que, pour tout réel x de $[\,0\,;+\infty\,[$, différent de 1, les affirmations suivantes sont équivalentes :

   $\left|f(x)-g_1(x)\right|\le\left|f(x)-g_2(x)\right|$

   $\left|\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|\le\left|a\sqrt{x}+a-1\right|$ (on pourra multiplier les deux membres de cette deuxième inégalité par $\left|\sqrt{x}-1\right|$ pour montrer qu'elle est équivalente à la première)

   $\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2\le\left(a\sqrt{x}+a-1\right)^2$

   $0\le\left(a-\frac{1}{2}\right)\left[(2a+1)\sqrt{x}+2a-3\right]$

4. L'intervalle I est défini comme étant égal à :

   $]\,0\,;+\infty\,[$ si $a\ge\frac{3}{2}$ ou si $a\le-\frac{1}{2}$

   $\left]\left(\frac{3-2a}{2a+1}\right)^2;+\infty\right[$, si $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$

   $\left]0\,;\left(\frac{3-2a}{2a+1}\right)^2\right[$, si $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

   a. Démontrer dans chaque cas que, pour tout x élément de I, on a : $\left|f(x)-g_1(x)\right|\le\left|f(x)-g_2(x)\right|$.

   b. Démontrer que dans chaque cas I contient 1.

5. En déduire que g_1 est la meilleure approximation affine de f en 1.

DOCUMENT PROFESSEUR

Théorème

f étant une fonction numérique dérivable en x_0, la fonction affine tangente à f en x_0 , Φ_{x_0} , est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0.

En d'autres termes, pour toute fonction affine Ψ telle que $\Psi(x_0) = f(x_0)$, il existe un intervalle I_Ψ ouvert, non vide, centré en x_0 , tel que, pour tout réel x élément de I_Ψ , on ait : $\left|f(x)-\Phi_{x_0}(x)\right| \leq \left|f(x)-\Psi(x)\right|$.

Démonstration

La fonction affine tangente à f en x_0 est définie par : $\Phi_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Une fonction affine Ψ telle que $\Psi(x_0) = f(x_0)$ est définie par $\Psi(x) = f(x_0) + a(x-x_0)$, où a est un réel.

<u>Premier cas</u> : $a = f'(x_0)$

La conclusion est vérifiée banalement.

<u>Deuxième cas</u> : $a \neq f'(x_0)$

On considère les fonctions numériques g et h définies par :

$$h(x) = \frac{f(x)-\Phi_{x_0}(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\,,$$

$$g(x) = \frac{f(x)-\Psi(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a \;;$$

On a :

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, d'où $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f'(x_0) - a.$

et par suite, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left|g(x)\right|-\left|h(x)\right|\right) = \left|f'(x_0)-a\right|.$

Or, $f'(x_0) - a \neq 0$, d'où $|f'(x_0) - a| > 0$ et par conséquent il existe un intervalle I_Ψ ouvert, non vide, centré en x_0 , et inclus dans l'ensemble de définition de f, tel que, pour tout réel x élément de I_Ψ et distinct de x_0 , on ait :

$\left|g(x)\right|-\left|h(x)\right| > 0,$

soit $\left|\dfrac{f(x)-\Psi(x)}{x-x_0}\right| > \left|\dfrac{f(x)-\Phi_{x_0}(x)}{x-x_0}\right|$, soit $\left|f(x)-\Psi(x)\right| > \left|f(x)-\Phi_{x_0}(x)\right|$;

de plus $\left|f(x_0)-\Psi(x_0)\right| > \left|f(x_0)-\Phi_{x_0}(x_0)\right| = 0$;

En conclusion :

Pour tout réel x élément de I_Ψ on a : $\left|f(x)-\psi(x)\right| \geq \left|f(x)-\Phi_{x_0}(x)\right|$.

LES TANGENTES D'ABORD

Objectif	*Déterminer une courbe à partir de ses tangentes.*
Outils	*Courbes paramétrées. Vecteur dérivé. Dérivée de la fonction composée..*

En pliant d'une certaine façon une feuille de papier on obtient les tangentes à une courbe qu'il s'agit de déterminer.

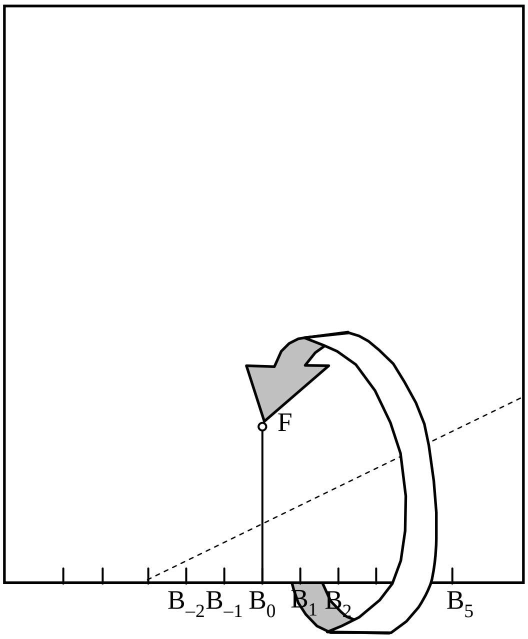
Sur une feuille de papier de format A_4 , on choisit un des deux petits côtés que l'on place vers soi.

On appelle B_0 le milieu de ce petit côté. On note F le point de la feuille tel que (B_0F) soit parallèle aux grands côtés de la feuille, et que $[B_0F]$ mesure 4 cm.

À droite de B_0, en partant de B_0, on gradue le petit côté de la feuille de centimètre en centimètre par les points B_1, B_2, ..., B_{10}. On fait de même à gauche de B_0, en partant de B_0 : on place les points B_{-1}, B_{-2}, … , B_{-10}.

Pour chaque entier i appartenant à l'ensemble { -10, -9, … , 0, 1, …, 10 }, on replie la feuille de manière à faire coïncider le point B_i et le point F puis on repasse au crayon chaque ligne de pliage. La droite portée par cette ligne de pliage sera appelée Δ_i.

À l'instar des ficelles tendues, en vogue dans les années 70, les droites Δ_i semblent délimiter une courbe $\mathcal{C}$ qu'il s'agit de déterminer.



Le plan de la feuille est supposé désormais illimité. On se place dans le repère orthonormal direct $\left(\mathrm{B}_0 \,;\, \overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1} \,;\, \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{F}}\right)$. Pour tout réel t, on note B_t le point de coordonnées $(t\,;\,0)$ et Δ_t la médiatrice du segment $[\mathrm{FB}_t]$.

1. Déterminer une équation de la droite Δ_t.

2. On suppose qu'il existe une courbe $\mathcal{C}$ admettant pour tangentes toutes les droites Δ_t. et que $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur 3.

   Pour tout réel t, on note M_t le point de contact entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ_t et $(\,x\,(t)\,;\,y\,(t)\,)$ les coordonnées du point M_t. Celles-ci dépendent du paramètre t et on suppose que les fonctions $t \mapsto x\,(t)$ et $t \mapsto y\,(t)$ sont dérivables sur 3.

   a. Démontrer que, pour tout réel t, $y'(t) = x'(t)(f' \circ x)(t) = x'(t)\,f'(x(t))$.

   b. Démontrer que, pour toute valeur de t telle que $x'(t)$ ne soit pas nul, le vecteur $\vec{v_t}(x'(t)\,;\,y'(t))$ est un vecteur directeur de Δ_t.

   c. En déduire que, pour tout réel t tel que $x'(t) \neq 0$, on a : $t\,x'(t) - 4\,y'(t) = 0$ (1)

   d. Justifier que, pour tout réel t, on a : $t\,x(t) - 4y(t) - \dfrac{t^2}{2} + 8 = 0$ (2)

   En déduire que, pour tout réel t on a : $x(t) + tx'(t) - 4y'(t) - t = 0$ (3)

   e. Utiliser alors (1) et (3) pour exprimer $x\,(t)$ et $y\,(t)$ en fonction de t et démontrer que la fonction f ne peut être que la fonction définie sur 3 par $f(x) = \dfrac{x^2}{8} + 2$.

3. On pose $f(x) = \dfrac{x^2}{8} + 2$.

   Démontrer que les tangentes à la courbe représentative de f sont les droites Δ_t avec t décrivant **R**.

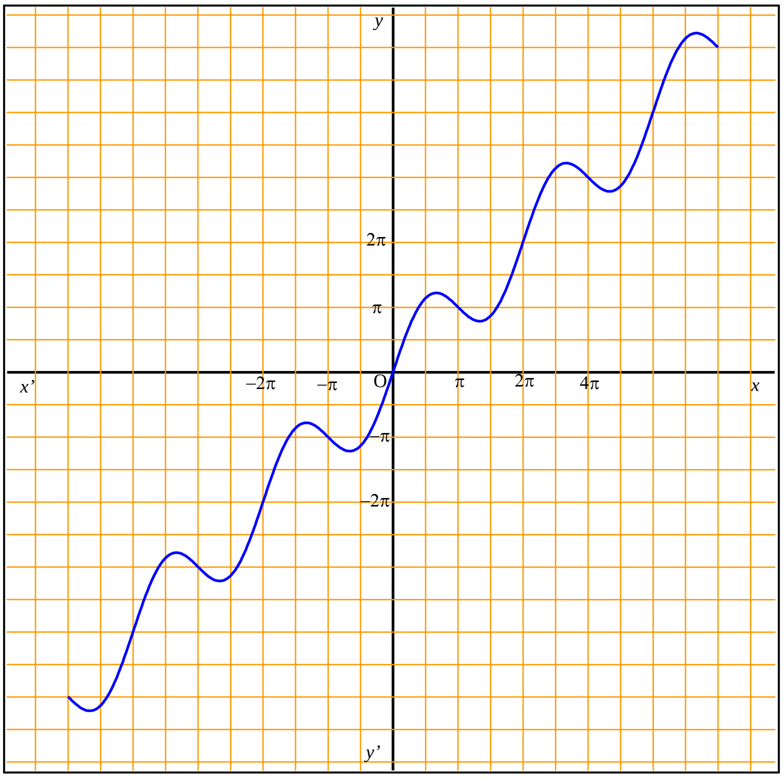
DEUX POINTS, UNE SEULE TANGENTE

Objectif	*Soulever le problème de l'existence d'une droite tangente à la courbe représentative d'une fonction en deux points distincts.*
Outils	*Dérivées. Fonction exponentielle (dernier exercice uniquement).*

Étant donné la courbe représentative d'une fonction dans le plan rapporté à un certain repère, existe-t-il deux points distincts de cette courbe tels que les tangentes à la courbe en ces points soient confondues ?[2]

Dans chacun des exercices suivants, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$, d'une fonction f définie et dérivable sur un sous ensemble D de $\mathbf{R}$.

a étant un réel quelconque de D, on note $\mathrm{T}a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, m_a son coefficient directeur et p_a son ordonnée à l'origine.



A. Exercice 1

Soit f définie par $f(x) = x + 2 \sin x$.

Vérifier que $\mathscr{C}$ admet une même tangente T en tous les points d'abscisses $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et une même tangente T' en tous les points d'abscisse $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k étant un entier relatif quelconque.

Tracer T et T' sur le graphique ci-contre.

[2] Le problème abordé ici, des tangentes confondues, n'est pas traité pour les courbes simples (hyperbole, parabole) parce que ces courbes n'en admettent pas et qu'il est aisé de l'établir.

B. Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$. $\mathcal{C}$ est donc une courbe « cubique ».

a. Pour tout réel a, exprimer m_a et p_a en fonction de a.

b. En déduire que les tangentes à $\mathcal{C}$ en deux points distincts de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives a et b ne sont jamais confondues.

c. Illustrer ce résultat en représentant sur l'écran de la calculatrice la fonction f correspondant à $p = -10$ et $q = 0$.

C. Exercice 3

Soit f définie par $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1{,}5\,x$.

a. Pour tout réel a, exprimer m_a et p_a en fonction de $f(a)$ et $f'(a)$, puis en fonction de a.

b. a et b désignent deux réels distincts.
En utilisant m_a, p_a, m_b, p_b, démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux deux points d'abscisses a et b sont confondues si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ (a+b)\left[-3(a^2+b^2)+2\right] = 0 \end{cases}$$

c. Démontrer que ce système est vérifié dans les deux seuls cas suivants :

$$\begin{cases} a = -b \\ a^2 = 1 \end{cases} \text{ (cas 1) ou } \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{2}{3} \\ ab = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ (cas 2)}$$

puis démontrer que le cas 2 implique $a = b$, et, donc, est exclu.

d. En déduire qu'il existe une seule droite tangente à $\mathcal{C}$ en deux points distincts et préciser quelle est cette droite.

e. Vérifier ce résultat sur l'écran d'une calculatrice.

D. Exercice 4

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - 2e^x$.

Représenter f sur l'écran d'une calculatrice, puis démontrer, en étudiant les variations de la fonction $p\ :\ a \mapsto p_a = p(a)$, qu'il n'existe pas de droite du plan tangente à $\mathcal{C}$ en deux points distincts.

E. Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x) = \sin x$ (f est donc la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$).

Tracer $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice.

Semble-t-il exister une droite qui soit tangente à $\mathcal{C}$ en deux de ses points ? On se propose de démontrer cette conjecture.

a. Soit a un élément de $[-\pi\ ;\ \pi]$. Exprimer p_a en fonction de a.

b. Étudier les variations de la fonction p définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par $p\ :\ a \mapsto p_a = p(a)$.

c. En déduire que, si a est distinct de b, les tangentes en a et b sont distinctes.

DEUX COURBES, UNE SEULE TANGENTE

Objectif	*Soulever le problème d'une tangente commune à deux courbes, en un même point ou en deux points distincts.*
Outils	*Dérivées. Fonction exponentielle. Fonctions trigonométriques.*

À quelles conditions deux courbes possède-t-elles une tangente commune ?

A. Tangente commune à deux courbes en un point commun

1. Préliminaire

Soit f et g deux fonctions, ayant pour ensembles de définition respectifs D_f et D_g , et soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$. On suppose f et g dérivables sur leur ensemble de définition.

Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une tangente commune en un point commun si et seulement si il existe un nombre réel a de $D_f \cap D_g$ qui vérifie le système $\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$

2. Premier exemple.

a. Déterminer le réel p tel que les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$, représentations respectives des fonctions $f : x \mapsto -x^2 + p$ et $g : x \mapsto \dfrac{2}{x}$, admettent une tangente commune en un point commun.

Déterminer alors une équation de la tangente $\mathcal{T}$ commune.

b. Vérifier en représentant $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ sur la calculatrice.

3. Deuxième exemple

a. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{20}x^2 + 1$ et $g(x) = \left(\dfrac{1}{20}x^2 + 1\right)\cos x$. Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont même tangente en une infinité de points communs dont on précisera les abscisses, puis tracer $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur la calculatrice pour des valeurs d'abscisses et d'ordonnées comprises entre -20 et 20.

b. Généralisation de l'exemple précédent.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbf{R}$, et ω un nombre réel non nul quelconque. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x).\cos(\omega x)$. On note $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les courbes représentatives respectives de f et de g.
Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont la même tangente en une infinité de points communs dont on précisera les abscisses.

B. Tangente commune à deux courbes en deux points distincts

1. Préliminaire

Soit f et g deux fonctions définies et dérivables respectivement sur les ensembles D_f et D_g et soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une tangente commune si et seulement si il existe un nombre réel a de D_f et un nombre réel b de D_g qui vérifient le système : $\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ g(b) - f(a) = f'(a) \times (b-a) \end{cases}$.

2. Premier exemple

Démontrer que les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$, représentations respectives des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, admettent une tangente commune $\mathcal{T}$ dont on déterminera une équation.

Représenter $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ sur une même figure.

3. Deuxième exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = -\dfrac{1}{x}$. On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ leurs courbes représentatives respectives.

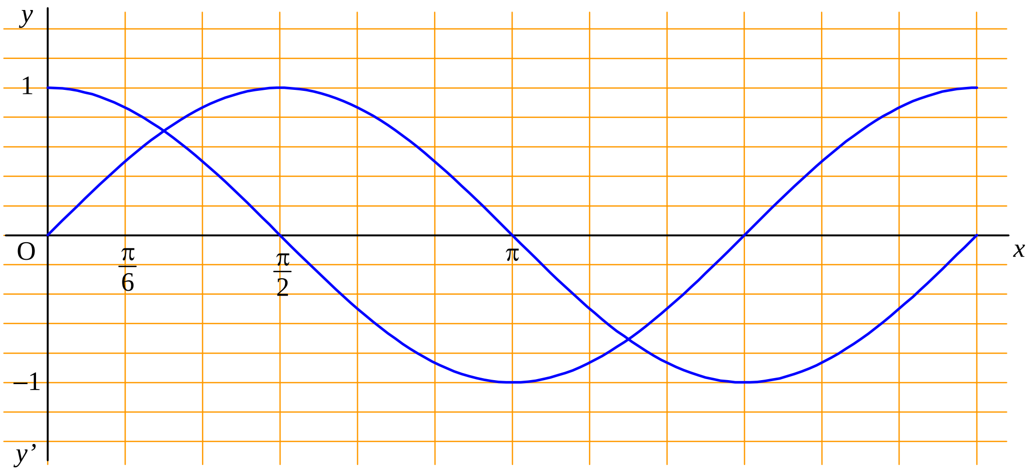
a. Tracer ces deux courbes sur la calculatrice.

b. Soir a un élément de $\mathbf{R}$ et b un élément de $]\,0\,;+\infty\,[$.
Démontrer que la tangente à $\mathcal{E}$ au point d'abscisse a est confondue avec la tangente à $\mathcal{H}$ au point d'abscisse b si et seulement si le système suivant est vérifié : $\begin{cases} a = -2\ln b \\ 2b + 2\ln b + 1 = 0 \end{cases}$.

c. Grâce à une étude de fonction, démontrer que la deuxième équation de ce système admet une solution unique β. Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

d. En déduire que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ admettent une tangente commune $\mathcal{T}$.

C. Sujet d étude 1



On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[\,0\,;2\,\pi\,]$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$. On note $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ leurs courbes représentatives respectives.

1. Conjecturer, grâce au graphique, le nombre de tangentes communes à ces deux courbes.

2. Soit a et b deux réels de l'intervalle $[\,0\,;2\,\pi\,]$.

   Démontrer que la tangente à $\mathcal{S}$ au point d'abscisse a est confondue avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse b si et seulement si l'un des trois systèmes suivants est vérifié :

$$\begin{cases} b = a - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0 = \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\cos a \end{cases}, \qquad k \in \mathbf{Z} \quad \text{(cas 1)}$$

$$\begin{cases} b = -a + \dfrac{3\pi}{2} \\ a\cos a - \dfrac{3\pi}{4}\cos a - \sin a = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{(cas 2)} \qquad \begin{cases} b = -a + \dfrac{7\pi}{2} \\ a\cos a - \dfrac{7\pi}{4}\cos a - \sin a = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{(cas 3)}$$

3. Déterminer toutes les tangentes communes à $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ correspondant au cas 1.

4. Étude du cas numéro 2.

   Démontrer que dans ce cas, a appartient à l'intervalle $\left[\,0\,;\dfrac{3\pi}{2}\,\right]$.

   Soit Φ la fonction définie sur $\left[\,0\,;\dfrac{3\pi}{2}\,\right]$ par $\Phi(a) = a\cos a - \dfrac{3\pi}{4}\cos a - \sin a$.

   Calculer la dérivée de Φ puis étudier le signe de $\Phi'(a)$, pour a dans $\left[\,0\,;\dfrac{3\pi}{2}\,\right]$.

   Justifier chacune des indications données dans le tableau de variation suivant :

a	0		$\dfrac{3\pi}{4}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$
$\Phi(a)$		$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\nearrow$	1

   Démontrer qu'il existe un unique réel a de $\left[\,0\,;\dfrac{3\pi}{2}\,\right]$ vérifiant $\Phi(a) = 0$ et donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

   Démontrer qu'il y a une unique tangente commune correspondant au cas numéro 2.

   La construire soigneusement sur le dessin, en plaçant d'abord deux de ses points.

5. Étude du cas numéro 3

   a. Démontrer que, dans ce cas, a appartient à l'intervalle $\left[\,\dfrac{3\pi}{2}\,;\pi\,\right]$.

   b. Soit Ψ la fonction définie sur $\left[\,\dfrac{3\pi}{2}\,;\pi\,\right]$ par $\Psi(a) = a\cos a - \dfrac{7\pi}{4}\cos a - \sin a$.

      Calculer la dérivée de Ψ, puis étudier le signe de $\Psi'(a)$ pour a dans $\left[\,\dfrac{3\pi}{2}\,;\pi\,\right]$.

      En déduire que Ψ admet un minimum que l'on déterminera.

   c. Démontrer que l'équation $\Psi(a) = 0$ n'a pas de solution dans $\left[\,\dfrac{3\pi}{2}\,;\pi\,\right]$, puis qu'il n'y a pas de tangente correspondant au cas numéro 3.

D. Sujet d'étude 2

$\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{E}$ sont les représentations graphiques respectives des fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto e^x$.

1. Démontrer qu'il existe une droite $\mathfrak{T}$ tangente à la courbe $\mathfrak{L}$ en un point A, d'abscisse a, et à la courbe $\mathfrak{E}$ en un point B, d'abscisse b, si et seulement si on a : $\begin{cases} b = -\ln(a) & (1) \\ a\ln(a) - \ln(a) - a - 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

2. φ est la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $\varphi(x) = x\ln(x) - \ln(x) - x - 1$.

a. Prouver que φ est strictement monotone sur $]\,0\,;1\,[$.

Prouver qu'il existe une seule valeur α de $]\,0\,;1\,[$ telle que $\varphi(\alpha)=0$ et que α soit solution de (2).

b. Démontrer que $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\varphi(x)}{x}$. En déduire que $\varphi(x)=0$ si et seulement si $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

3. En déduire que l'équation (2) n'admet que les solutions α et $\frac{1}{\alpha}$.

4. Justifier alors qu'il existe deux tangentes communes à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$:

– (T_1) tangente à la courbe $\mathcal{L}$ au point A_1 $(\alpha\,;\ln(\alpha))$ et à la courbe $\mathcal{E}$ au point B_1 $\left(-\ln(\alpha)\,;\frac{1}{\alpha}\right)$;

– (T_2) tangente à la courbe $\mathcal{L}$ au point A_2 $\left(\frac{1}{\alpha}\,;-\ln(\alpha)\right)$ et à la courbe $\mathcal{E}$ au point B_2 $(\ln(\alpha)\,;\alpha)$.

5. a. $\mathcal{H}$ est la représentation graphique de la fonction h définie sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$par $h(x)=\frac{x+1}{x-1}$

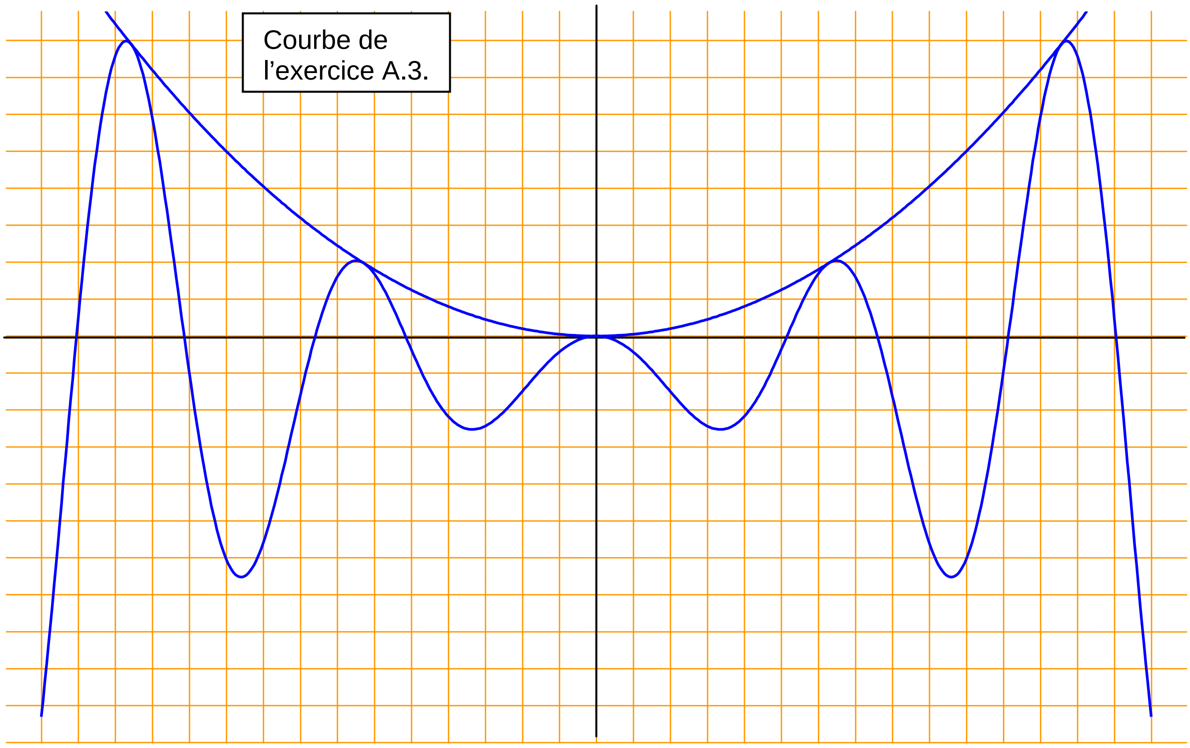
Montrer que $\mathcal{H}$ admet la droite (D) d'équation $y=x$ comme axe de symétrie et que B_1 et B_2 sont les points d'intersection de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$.

Prouver que A_1 et A_2 sont les points d'intersection des courbes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$.

b. Prouver que les points B_1 et B_2 sont les symétriques respectifs des points A_2 et A_1 par rapport à la droite (D).

c. Tracer avec soin, et en utilisant des couleurs différentes, $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ et (D), placer alors les points A1, A_2, B_1 et B_2, tracer enfin les droites (T_1) et (T_2).

DOCUMENT PROFESSEUR

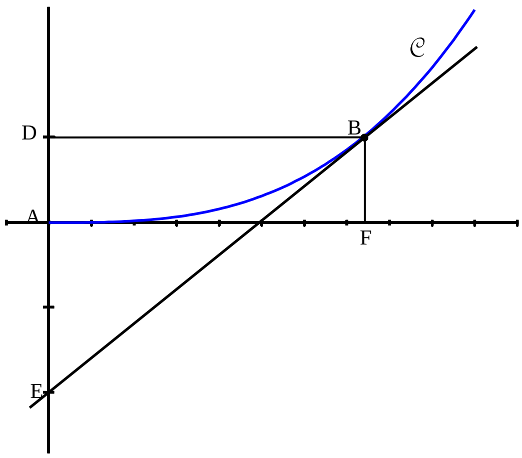


UNE TANGENTE CHEZ TORRICELLI

Objectif	*Justifier, avec les outils actuels, une méthode historique de construction de tangentes.*
Outils	*Coefficient directeur de la tangente. Dérivées des fonctions $x \mapsto x^p$ et $x \mapsto x^{-p}$ pour p entier naturel non nul.* *Cette séquence s'appuie sur un texte cité dans un article de F. de Gandt*

Il s'agit ici d'analyser une méthode de construction des tangentes à une courbe utilisée par Torricelli

A. Une méthode de Torricelli pour la construction d'une tangente



Evangelista Torricelli, qui vécut de 1608 à 1647, fut un mathématicien disciple de Galileo Galilei, dont il fut le secrétaire et auquel il succéda au poste de professeur de mathématiques à l'Académie de Florence. On reprend ici un de ses textes cité par F. de Gandt dans l'ouvrage collectif « Penser les mathématiques », collection « Points-Sciences », aux éditions du Seuil.

Dans ce texte[3], Torricelli donne une méthode pour construire une tangente quelconque à une courbe cubique, également appelée « parabole cubique ». En utilisant le langage mathématique actuel, une telle courbe est la représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(A\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, d'une fonction de la forme $x \mapsto k\,x^3$, $k \in \mathbf{R}^*$. Torricelli appelle « sommet » le point A et « diamètre », noté Δ, l'axe des ordonnées.

Il considère un point B quelconque de la courbe et note D son projeté orthogonal sur Δ. Il affirme (voir la figure) : *« Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, donc trois fois DA dans le cas présent, et la ligne qui joint EB sera la tangente… »*

Il faut comprendre que E est défini, en notations actuelles, par $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{DA}$.

B. Explicitation et vérification de l'affirmation de Torricelli

Soit b l'abscisse du point B dans le repère $(A\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. Déterminer en fonction de k et de b le coefficient directeur de la droite T, tangente à $\mathcal{C}$ en B.

[3] La référence donnée par F. de Gandt est : *Opere*, 3 volumes en 4 tomes, Faënza, 1919, I, II, p. 311.

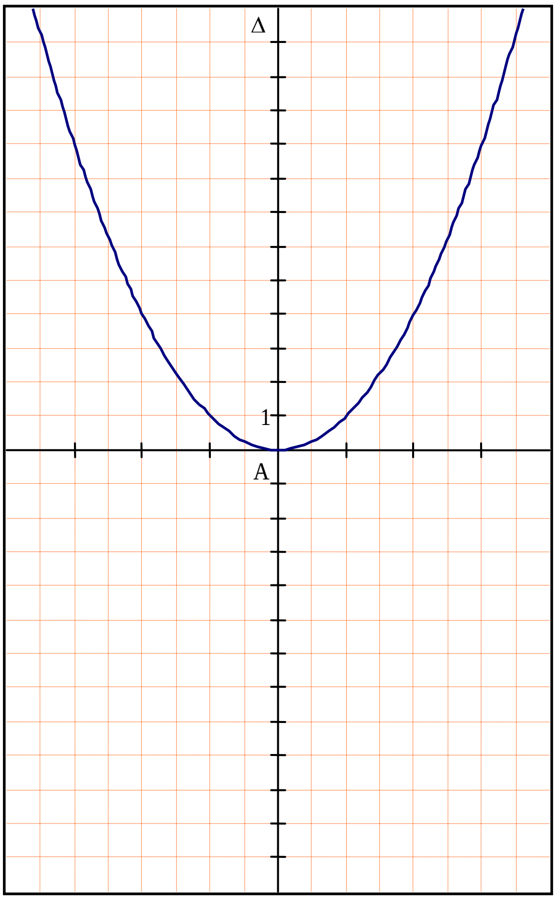
2. Après voir déterminé les coordonnées des points B, D et E, donner le coefficient directeur de la droite (EB).
3. Vérifier l'affirmation de Torricelli, suivant laquelle (EB) est la tangente à $\mathcal{C}$.

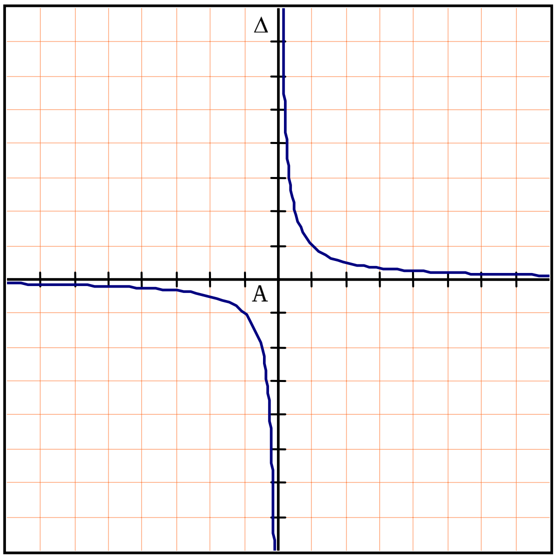
C. Généralisation de la méthode de Torricelli

De façon générale, Torricelli appelle « parabole » la courbe représentative dans un repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$ d'une fonction de la forme $x \mapsto k.x^p$, où $p \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{R}^*$. p est « l'exposant de la parabole ». Torricelli affirme que sa méthode s'applique à toute « parabole ».

« *Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, […], et la ligne qui joint EB sera la tangente…* » .

1. Énoncer avec précision une méthode de construction d'une tangente quelconque à $\mathcal{C}'$, d'après l'idée de Torricelli, puis justifier cette construction.
2. Utiliser la méthode de Torricelli pour construire diverses tangentes à la parabole (la vraie parabole, d'exposant 2) tracée sur la figure ci-contre.





3. Vérifier que la méthode de Torricelli décrite à la question 1 est encore valable si l'exposant p est un entier strictement négatif (dans ce cas A n'est plus située sur $\mathcal{C}'$).

   Dans le cas $p = -1$ la courbe est une hyperbole de centre A. Utiliser la méthode de Torricelli pour tracer diverses tangentes à cette hyperbole.

D. Remarque sur la démonstration donnée par Torricelli

Torricelli n'avait pas à sa disposition le concept de fonction, ni celui de nombre dérivé. Les démonstrations données au B et au C lui étaient donc inaccessibles. Les démonstrations originales de Torricelli sont de nature cinématique : elles reposent sur l'étude du mouvement d'un point décrivant la courbe considérée, et sur la considération de ce que nous appelons aujourd'hui le « vecteur vitesse instantanée » de ce point.

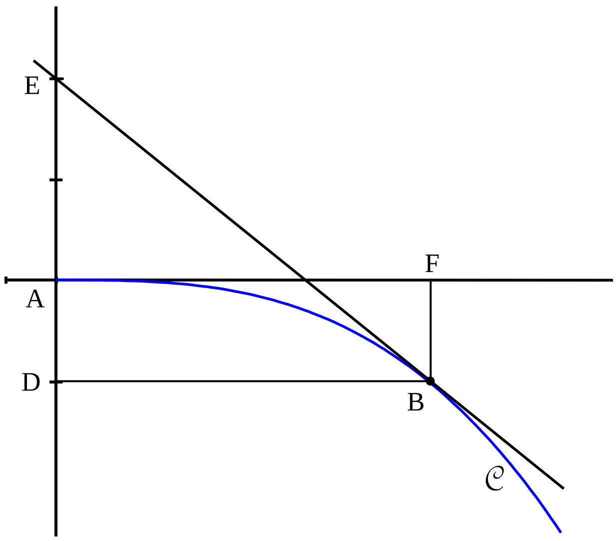
UNE TANGENTE PAR LA CINÉMATIQUE CHEZ TORRICELLI

Objectif	*Traduire dans le langage mathématique actuel un résultat et une démonstration historiques.*
Outils	*Courbes paramétrées.* *Cette séquence s'appuie sur un texte cité dans un article de F. de Gandt*

On analyse ici, dans le langage de la cinématique, une méthode de construction des tangentes à une courbe utilisée par Torricelli.

A. Une méthode de Torricelli pour la construction d'une tangente

Evangelista Torricelli, qui vécut de 1608 à 1647, fut un mathématicien disciple de Galileo Galilei, dont il fut le secrétaire et auquel il succéda au poste de professeur de mathématiques à l'Académie de Florence. On reprend ici un de ses textes cité par F. de Gandt dans l'ouvrage collectif « Penser les mathématiques », collection « Points-Sciences », aux éditions du Seuil.



Dans ce texte[4], Torricelli donne une méthode pour construire une tangente quelconque à une courbe cubique, également appelée « parabole cubique ». En utilisant le langage mathématique actuel, une telle courbe est la représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{A};\vec{i};\vec{j})$, d'une fonction de la forme $x \mapsto k\,x^3$, $k \in \mathbf{R}^*$. Torricelli appelle « sommet » le point A et « diamètre », noté Δ, l'axe des ordonnées. Il considère un point B quelconque de la courbe et note D son projeté orthogonal sur Δ. Il affirme (voir la figure) :

« Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, donc trois fois DA dans le cas présent, et la ligne qui joint EB sera la tangente… »

Il faut comprendre que E est défini, en notations actuelles, par $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.

B. Explicitation et vérification de l'affirmation de Torricelli

Soit b l'abscisse de B dans le repère $(\mathrm{A};\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer en fonction de k et de b le coefficient directeur de la droite T, tangente à $\mathcal{C}$ en B.

[4] La référence donnée par F. de Gandt est : *Opere*, 3 volumes en 4 tomes, Faënza, 1919, I, II, p. 311.

2. Après voir déterminé les coordonnées des points B, D et E, donner le coefficient directeur de la droite (EB).
3. Vérifier l'affirmation de Torricelli, suivant laquelle (EB) est la tangente à $\mathcal{C}$.

C. La démonstration de Torricelli

Cependant, Torricelli n'avait pas à sa disposition le concept de fonction, ni celui de nombre dérivé. La démonstration donnée au B. lui était donc inaccessible. Il ne pouvait aborder le concept de dérivée que sous son aspect de vitesse instantanée, et l'origine de son affirmation réside donc dans la cinématique, c'est-à-dire l'étude des mouvements. Voici la justification qu'il en donne :

« *En effet, le point mobile B qui décrit la parabole cubique possède deux vitesses instantanées*[5] *lorsqu'il est dans la position B :*
– une vitesse instantanée horizontale dirigée suivant la tangente AF,
– une vitesse instantanée perpendiculaire selon le diamètre AD.

On cherche le rapport de ces deux vitesses de la façon suivante : la vitesse instantanée horizontale, pendant le temps de chute, a fait parcourir l'espace DB, et de son côté la vitesse instantanée perpendiculaire, selon ce qui a été dit, ferait parcourir, pendant la durée de chute, si elle se conservait toujours égale, un espace triple de la chute AD ; par conséquent, le mouvement ou la direction du point B, qui est composé de deux vitesses qui sont l'une à l'autre comme BD à DE, se fera le long de la ligne BE ».

D. Explication de ce texte

Pour tenter de faire comprendre cette démonstration de Torricelli, nous allons la traduire dans le langage de la cinématique (ou des représentations paramétriques), et dans celui des vecteurs. Ces concepts n'existaient certes pas sous leur forme actuelle au temps de Torricelli, mais ils ne trahissent pas, nous semble-t-il, le raisonnement de ce grand mathématicien.

Torricelli considère que la courbe cubique $\mathcal{C}$ définie au B est décrite par un point mobile B, dont la vitesse horizontale (suivant (Ax)) est constante. Il sous-entend que le point B suit la loi horaire, ou représentation paramétrique : $x = f(t) = t$; $y = g(t) = k.t^3$.

1. Soit $\overrightarrow{V(t)}$ le vecteur dérivé à l'instant t de cette représentation paramétrique, appelé aussi « vecteur vitesse instantanée ». Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{V(t)}$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$, que Torricelli appelle respectivement « vitesse instantanée horizontale » et « vitesse instantanée perpendiculaire ».

2. Vérifier les affirmations suivantes, qui sont celles de Torricelli adaptées en langage moderne :
« La vitesse instantanée horizontale, pendant le temps de chute entre les instants 0 et t provoque le déplacement $\overline{\text{DB}} = x_{\text{B}} - x_{\text{D}}$, et de son côté, la vitesse instantanée perpendiculaire à l'instant t, si elle se conservait égale entre les instants 0 et t, provoquerait un déplacement triple de $\overline{\text{AD}} = y_{\text{D}} - y_{\text{A}}$ ».

3. En déduire que, pour $t \neq 0$, $\dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{\overline{\text{ED}}}{\overline{\text{DB}}}$, traduction de l'affirmation suivante de Torricelli : « *les deux vitesses sont l'une à l'autre comme BD à DE* ».

4. Déduire du 3 que les vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\text{EB}}$ sont colinéaires, puis que la droite (EB) est la tangente en B à $\mathcal{C}$.

[5] On traduit ici le mot latin « impetus », dont le sens est imprécis et multiple dans la Physique du XVII^e siècle, par l'expression « vitesse instantanée », qui convient pour ce texte.

DÉRIVONS EN VITESSE

Objectif	*Comparer deux approximations du nombre dérivé d'une fonction numérique en un point, l'une issue de la définition mathématique usuelle, l'autre utilisée par les calculatrices.*
Outils	*Nombre dérivé et interprétation graphique.*

Cette séquence a été publiée dans la brochure
« Espace modules - Mathématiques première S »
CRDP d'Aquitaine - 1996

Lorsque h est assez petit, les nombres $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ et $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0-h)}{2h}$ sont des valeurs approchées du nombre dérivé de la fonction f en t_0. Le deuxième, qui semble donner une meilleure approximation que le premier, est utilisé par les calculatrices. On se propose ici de comparer ces nombres et d'étudier la légitimité de ces approximations.

Un point M se déplace sur une droite. Sa position à l'instant t est caractérisée par son abscisse dans le repère (O, I) : $x = f(t)$ où f est une fonction dérivable en t_0.

Par définition, on appelle vitesse instantanée de M à l'instant t_0 le nombre dérivé de f en t_0 : $f'(t_0)$.

Dans la pratique, on utilise deux valeurs approchées de cette vitesse :

$$V(t_0\,;h) = \frac{f(t_0+h)-f(t_0-h)}{2h} \qquad \text{pour } h \text{ « assez petit »,}$$

$$W(t_0\,;h) = \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \qquad \text{pour } h \text{ « assez petit ».}$$

On se propose de comparer ces deux approximations.

À cet effet, on introduit les nombres $\varphi(t_0\,;h) = V(t_0\,;h) - f'(t_0)$ et $\mu(t_0\,;h) = W(t_0\,;h) - f'(t_0)$.

REMARQUE
$V(t_0\,;h)$ est le coefficient directeur de la droite (M_1M_2).
$W(t_0\,;h)$ est le coefficient directeur de la droite (MM_2).

A. Légitimité de l'approximation de $f'(t_0)$ par $V(t_0\,;\,h)$

Soit f une fonction dérivable en t_0 et $f'(t_0)$ le nombre dérivé de f en ce point.

1. Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h}=f'(t_0)$.
2. Vérifier que $V(t_0\,;h)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}+\dfrac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h}\right]$ et en déduire $\lim\limits_{h\to 0}V(t_0\,;h)=f'(t_0)$.

B. Comparaison des approximations dans des cas particuliers

1. Mouvement uniforme : $f(t)=at+b$ $(a\neq 0)$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$ et $\mu(t_0\,;h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.
   c. Conclure.
2. Mouvement uniformément accéléré : $f(t)=at^2+bt+c$ $(a\neq 0)$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$ et $\mu(t_0\,;h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.
   c. Conclure.
3. Mouvement de loi horaire $f(t)=t^3$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$ et $\mu(t_0\,;h)$.
   c. On se place à l'instant $t_0=1$; expliciter $\varphi(1\,;\,h)$ et $\mu(1\,;\,h)$.
   Démontrer que, pour tout h élément de $]-0{,}1\,;\,0{,}1\,[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(1\,;h)}{\mu(1\,;h)}\right|<1$. Conclure.
4. Mouvement de loi horaire $f(t)=\dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$, $\mu(t_0\,;h)$ et $\dfrac{\varphi(t_0\,;h)}{\mu(t_0\,;h)}$.
   c. Déterminer un nombre réel strictement positif ε tel que, pour tout nombre réel h élément de l'intervalle $]-\varepsilon\,;+\varepsilon\,[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(t_0\,;h)}{\mu(t_0\,;h)}\right|<1$. Conclure.

C. Rôle de l'hypothèse de dérivabilité

Les deux approximations du nombre dérivé de f en t_0 supposent évidemment la dérivabilité de f en t_0 (passée peut-être inaperçue !).

Soit $f(t)=|t|$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

Calculer $V(0\,;h)$ et $W(0\,;h)$. Donner les valeurs exactes de $V(0\,;10^{-6})$ et de $W(0\,;10^{-6})$. Conclure.

D. La machine dicte sa loi

De nombreuses calculatrices donnent le nombre dérivé d'une fonction en un point t_0, mais elles affichent en fait la valeur de $V(t_0\,;h)$ pour h « très petit ». Selon les calculatrices, le paramètre h peut ou doit être défini par l'utilisateur (voir mode d'emploi).

Remplir le tableau ci-contre en indiquant le nombre dérivé de la fonction f en t_0 affiché par la calculatrice.

Certaines réponses sont aberrantes. Pourquoi ?

$f(t)$ \ t_0	-5	-2	0	2	5
t^2					
t^3					
$\frac{1}{t}$					
$\lvert t\rvert$					

E. Sujet d'étude

À l'instant $t = 0$, on lâche une balle, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 5 m.

On suppose que, durant sa chute, la distance $f(t)$ entre la balle et le sol est définie par $f(t) = -5t^2 + 5$, que la balle touche le sol à l'instant $t = 1$ puis rebondit.

On suppose alors que, entre le premier et le second rebond (à l'instant $t = 2{,}5$), la distance entre la balle et le sol est définie par $f(t) = -5t^2 + 17{,}5t - 12{,}5$.

En résumé $\begin{cases} f(t) = -5t^2 + 5 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ f(t) = -5t^2 + 17{,}5t - 12{,}5 & \text{si } 1 \le t \le 2{,}5 \end{cases}$

1. À l'instant $t = 1$, on considère :

$$V(1\,;h) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \quad \text{et} \quad W(1\,;h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{où} \quad -10^{-1} < h < 10^{-1}.$$

   a. Calculer $V(1\,;h)$ et $W(1\,;h)$ en distinguant $h > 0$ et $h < 0$.

   b. Donner les valeurs exactes de $V(1\,;10^{-6})$, $V(1\,;-10^{-6})$, $W(1\,;10^{-6})$ et $W(1\,;-10^{-6})$.

   c. Peut-on utiliser ces résultats pour émettre des conjectures sur la vitesse de la balle à l'instant $t = 1$?

2. a. Montrer que $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers zéro par valeurs négatives et lorsque h tend vers zéro par valeurs positives.

   Ces limites sont respectivement appelées nombre dérivé de f à gauche en 1 et nombre dérivé de f à droite en 1. On les note $f_g'(1)$ et $f_d'(1)$.

   La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

   b. Calculer $\frac{1}{2}(f_g'(1) + f_d'(1))$. Que constate-t-on ?

3. Plus généralement, soit une fonction numérique f de la variable réelle t, définie sur un intervalle ouvert I, admettant, en un point t_0 de l'intervalle I, un nombre dérivé à gauche $f_g'(t_0)$ et un nombre dérivé à droite $f_d'(t_0)$.

   Démontrer que $V(t_0\,;h)$ a pour limite $\frac{1}{2}(f_g'(t_0) + f_d'(t_0))$ lorsque h tend vers zéro.

DOCUMENT PROFESSEUR

NOTE TECHNIQUE SUR L'UTILISATION DE Géoplan

1. Création de l'imagiciel

L'imagiciel a été créé avec GÉOPLAN POUR WINDOWS.

Charger ou exécuter (suivant configuration) le fichier Géoplan

Voici la liste des objets à construire et des actions à effectuer pour créer cet imagiciel.

Description	Objets à créer
1. Afficher le repère de base Roxy	
2. Définir un point libre m et ses coordonnées (m est la « poignée » qui permettra de déplacer le segment [ab] (voir dessin page suivante) et le point M de la courbe). L'abscisse de m représente la variable t du problème.	`m` point libre `xm` abscisse de `m` (repère Roxy) `ym` ordonnée de `m` (repère Roxy)
3. Créer une constante définissant la demi-longueur du segment [ab]. Cette constante représente la variation maximale de la variable h utilisée dans le problème.	`d = 3`
4. Créer le segment [ab].	a point de coordonnées `(xm – d , ym)` b point de coordonnées `(xm + d , ym)` Segment [ab]

5. Créer un point libre sur le segment [ab] et son symétrique par rapport à m. Ce point est la deuxième « poignée » qui définit le nombre h du problème (différence entre l'abscisse de ce point et l'abscisse de m).	`m2` point libre sur le segment [ab]
	`xm2` abscisse de `m2`
	`h = xm2 – xm`
	`xm1 = xm – h`
	`m1` point de coordonnées `(xm1 , ym)`

6. Définir la fonction f (loi horaire du mouvement), sa dérivée et leurs courbes représentatives.	`f` fonction : $t \mapsto \frac{1}{t}$ `g` fonction : $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ `C1` courbe définie par `Y = f(T)`, `T` décrivant `[xm – d , xm + d]` (300 points, repère Roxy) `C2` courbe définie par `Y = g(T)`, `T` décrivant `[xm – d , xm + d]` (300 points, repère Roxy)

7. Placer les points M (instant t), M_1 (instant $t-h$), M_2 (instant $t+h$) sur la courbe représentant f.	`M` point de coordonnées `(xm , f(xm))`
	`M1` point de coordonnées `(xm1 , f(xm1))`
	`M2` point de coordonnées `(xm2 , f(xm2))`

8. Tracer les droites MM_1, MM_2, M_1M_2 et la tangente en M à la courbe.	Droite `(M1M2)` ; droite `(MM2)` ; droite `(MM1)` `D` droite passant par `M` et de coefficient directeur `g(xm)`

2. Utilisation

On peut agir sur t (donc sur M) et sur h (donc sur M_1 et M_2) à l'aide des « poignées » m et m_2.

L'imagiciel peut faire apparaître les valeurs de $f'(t)$ et, au choix, celles de $V(t\,;h)$ et $W(t\,;h)$ ou celles de $P(t\,;h)$ et $M(t\,;h)$.

Le dessin se modifie instantanément lorsqu'on définit une nouvelle fonction et sa dérivée.

On peut zoomer sur M.

NOTE TECHNIQUE SUR L'UTILISATION DE Derive

Pour calculer rapidement les valeurs approchées obtenues en utilisant l'une ou l'autre des formules, on peut utiliser un logiciel de calcul formel. Avec DERIVE cela donne :

① Entrer une fonction « à blanc » pour initialiser la variable F.

```
F(t):=
```

② Définir le nombre dérivé de la fonction F en t.

On utilise la définition du nombre dérivé en un point. DERIVE n'acceptant pas f' comme nom de fonction, on appelle cette fonction DF : $DF(t) := \lim\limits_{e \to 0} \dfrac{F(t+e)-F(t)}{e}$. On utilise ici e pour éviter tout conflit ultérieur avec l'emploi de h.

```
DF(t):=LIM((F(t+e)-F(t))/e,e,0)
```

③ Définir la fonction V : $V(t,h) = \dfrac{F(t+h)-F(t-h)}{2h}$

```
V(t,h):=(F(t+h)-F(t-h))/(2*h)
```

④ Définir la fonction W : $W(t,h) = \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h}$

```
W(t,h):=(F(t+h)-F(t))/h
```

⑤ Définir une fonction R permettant d'obtenir la valeur du nombre dérivé puis les valeurs approchées obtenues par V et par W :

```
R(t,h):=["f' : ",DF(x),"V : ",V(x,h),"W : ",W(x,h)]
```

⑥ Entrer la fonction F :

```
F(t):=a*t+b
```

⑦ Formuler la requête :

```
R(t,h)
```

⑧ Simplifier ce résultat (touche **S**). On obtient alors :

```
["f' : ",a,"V : ",a,"W : ",a]
```

⑨ Entrer une nouvelle fonction F :

```
F(t):=a*t^2+b*t+c
```

etc.

Sur la TI92 on peut formuler les requêtes de manière semblable.