DEUX COURBES, UNE SEULE TANGENTE

Objectif	*Soulever le problème d'une tangente commune à deux courbes, en un même point ou en deux points distincts.*
Outils	*Dérivées. Fonction exponentielle. Fonctions trigonométriques.*

À quelles conditions deux courbes possède-t-elles une tangente commune ?

A. Tangente commune à deux courbes en un point commun

1. Préliminaire

Soit f et g deux fonctions, ayant pour ensembles de définition respectifs D_f et D_g , et soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$. On suppose f et g dérivables sur leur ensemble de définition.

Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une tangente commune en un point commun si et seulement si il existe un nombre réel a de $D_f \cap D_g$ qui vérifie le système $\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$

2. Premier exemple.

a. Déterminer le réel p tel que les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$, représentations respectives des fonctions $f : x \mapsto -x^2 + p$ et $g : x \mapsto \dfrac{2}{x}$, admettent une tangente commune en un point commun.

Déterminer alors une équation de la tangente $\mathcal{T}$ commune.

b. Vérifier en représentant $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ sur la calculatrice.

3. Deuxième exemple

a. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{20}x^2 + 1$ et $g(x) = \left(\dfrac{1}{20}x^2 + 1\right)\cos x$. Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont même tangente en une infinité de points communs dont on précisera les abscisses, puis tracer $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur la calculatrice pour des valeurs d'abscisses et d'ordonnées comprises entre -20 et 20.

b. Généralisation de l'exemple précédent.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbf{R}$, et ω un nombre réel non nul quelconque. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x).\cos(\omega x)$. On note $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les courbes représentatives respectives de f et de g.
Démontrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont la même tangente en une infinité de points communs dont on précisera les abscisses.

B. Tangente commune à deux courbes en deux points distincts

1. Préliminaire

Soit f et g deux fonctions définies et dérivables respectivement sur les ensembles D_f et D_g et soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une tangente commune si et seulement si il existe un nombre réel a de D_f et un nombre réel b de D_g qui vérifient le système : $\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ g(b) - f(a) = f'(a) \times (b-a) \end{cases}$.

2. Premier exemple

Démontrer que les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$, représentations respectives des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, admettent une tangente commune $\mathcal{T}$ dont on déterminera une équation.
Représenter $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ sur une même figure.

3. Deuxième exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = -\dfrac{1}{x}$. On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ leurs courbes représentatives respectives.

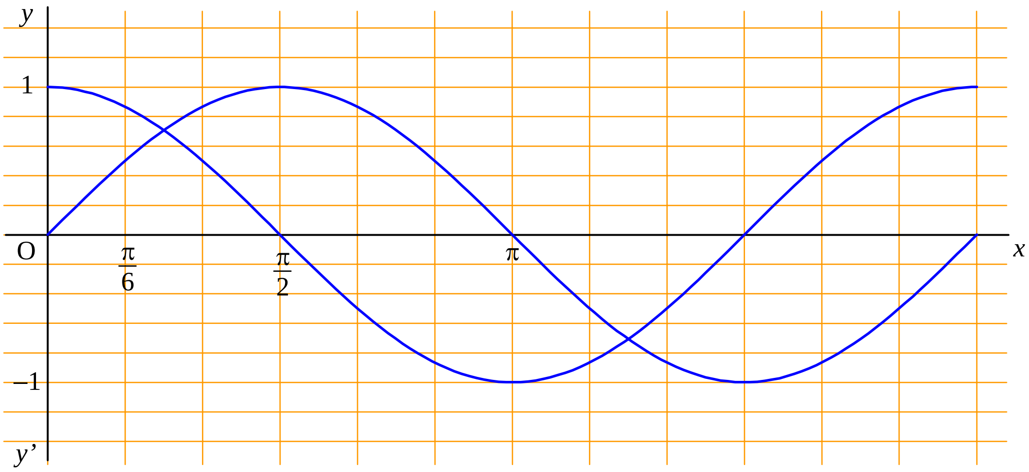
a. Tracer ces deux courbes sur la calculatrice.

b. Soir a un élément de $\mathbf{R}$ et b un élément de $]\,0\,;+\infty\,[$.
Démontrer que la tangente à $\mathcal{E}$ au point d'abscisse a est confondue avec la tangente à $\mathcal{H}$ au point d'abscisse b si et seulement si le système suivant est vérifié : $\begin{cases} a = -2\ln b \\ 2b + 2\ln b + 1 = 0 \end{cases}$.

c. Grâce à une étude de fonction, démontrer que la deuxième équation de ce système admet une solution unique β. Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

d. En déduire que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ admettent une tangente commune $\mathcal{T}$.

C. Sujet d étude 1



On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[\,0\,;2\,\pi\,]$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$. On note $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ leurs courbes représentatives respectives.

1. Conjecturer, grâce au graphique, le nombre de tangentes communes à ces deux courbes.

2. Soit a et b deux réels de l'intervalle $[\,0\,;2\,\pi\,]$.

   Démontrer que la tangente à $\mathcal{S}$ au point d'abscisse a est confondue avec la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse b si et seulement si l'un des trois systèmes suivants est vérifié :

$$\begin{cases} b = a - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0 = \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \right)\cos a \end{cases}, \qquad k \in \mathbf{Z} \quad \text{(cas 1)}$$

$$\begin{cases} b = -a + \dfrac{3\pi}{2} \\ a\cos a - \dfrac{3\pi}{4}\cos a - \sin a = 0 \end{cases}, \ k \in \mathbf{Z} \quad \text{(cas 2)} \qquad \begin{cases} b = -a + \dfrac{7\pi}{2} \\ a\cos a - \dfrac{7\pi}{4}\cos a - \sin a = 0 \end{cases}, \ k \in \mathbf{Z} \quad \text{(cas 3)}$$

3. Déterminer toutes les tangentes communes à $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ correspondant au cas 1.

4. Étude du cas numéro 2.

   Démontrer que dans ce cas, a appartient à l'intervalle $\left[0 \,; \dfrac{3\pi}{2} \right]$.

   Soit Φ la fonction définie sur $\left[0 \,; \dfrac{3\pi}{2} \right]$ par $\Phi(a) = a\cos a - \dfrac{3\pi}{4}\cos a - \sin a$.

   Calculer la dérivée de Φ puis étudier le signe de $\Phi'(a)$, pour a dans $\left[0 \,; \dfrac{3\pi}{2} \right]$.

   Justifier chacune des indications données dans le tableau de variation suivant :

a	0	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\Phi(a)$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$ $-\frac{\pi}{4}$ $\nearrow$	1

   Démontrer qu'il existe un unique réel a de $\left[0 \,; \dfrac{3\pi}{2} \right]$ vérifiant $\Phi(a) = 0$ et donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

   Démontrer qu'il y a une unique tangente commune correspondant au cas numéro 2.

   La construire soigneusement sur le dessin, en plaçant d'abord deux de ses points.

5. Étude du cas numéro 3

   a. Démontrer que, dans ce cas, a appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2} \,; \pi \right]$.

   b. Soit Ψ la fonction définie sur $\left[\dfrac{3\pi}{2} \,; \pi \right]$ par $\Psi(a) = a\cos a - \dfrac{7\pi}{4}\cos a - \sin a$.

   Calculer la dérivée de Ψ, puis étudier le signe de $\Psi'(a)$ pour a dans $\left[\dfrac{3\pi}{2} \,; \pi \right]$.

   En déduire que Ψ admet un minimum que l'on déterminera.

   c. Démontrer que l'équation $\Psi(a) = 0$ n'a pas de solution dans $\left[\dfrac{3\pi}{2} \,; \pi \right]$, puis qu'il n'y a pas de tangente correspondant au cas numéro 3.

D. Sujet d'étude 2

$\mathscr{L}$ et $\mathscr{E}$ sont les représentations graphiques respectives des fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto e^x$.

1. Démontrer qu'il existe une droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe $\mathscr{L}$ en un point A, d'abscisse a, et à la courbe $\mathscr{E}$ en un point B, d'abscisse b, si et seulement si on a : $\begin{cases} b = -\ln(a) & (1) \\ a\ln(a) - \ln(a) - a - 1 = 0 & (2) \end{cases}$.

2. φ est la fonction définie sur $]\,0 \,; +\infty\,[$ par $\varphi(x) = x\ln(x) - \ln(x) - x - 1$.

a. Prouver que φ est strictement monotone sur $]\,0\,;1\,[$.

Prouver qu'il existe une seule valeur α de $]\,0\,;1\,[$ telle que $\varphi(\alpha)=0$ et que α soit solution de (2).

b. Démontrer que $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$. En déduire que $\varphi(x)=0$ si et seulement si $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

3. En déduire que l'équation (2) n'admet que les solutions α et $\dfrac{1}{\alpha}$.

4. Justifier alors qu'il existe deux tangentes communes à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$:

– (T_1) tangente à la courbe $\mathcal{L}$ au point A_1 (α ; $\ln(\alpha)$) et à la courbe $\mathcal{E}$ au point B_1 $\left(-\ln(\alpha)\,;\dfrac{1}{\alpha}\right)$;

– (T_2) tangente à la courbe $\mathcal{L}$ au point A_2 $\left(\dfrac{1}{\alpha}\,;-\ln(\alpha)\right)$ et à la courbe $\mathcal{E}$ au point B_2 ($\ln(\alpha)$; α).

5. a. $\mathcal{H}$ est la représentation graphique de la fonction h définie sur $\mathbf{R}\setminus\{\,1\,\}$par $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

Montrer que $\mathcal{H}$ admet la droite (D) d'équation $y=x$ comme axe de symétrie et que B_1 et B_2 sont les points d'intersection de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$.

Prouver que A_1 et A_2 sont les points d'intersection des courbes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$.

b. Prouver que les points B_1 et B_2 sont les symétriques respectifs des points A_2 et A_1 par rapport à la droite (D).

c. Tracer avec soin, et en utilisant des couleurs différentes, $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ et (D), placer alors les points A1, A_2, B_1 et B_2, tracer enfin les droites (T_1) et (T_2).

DOCUMENT PROFESSEUR