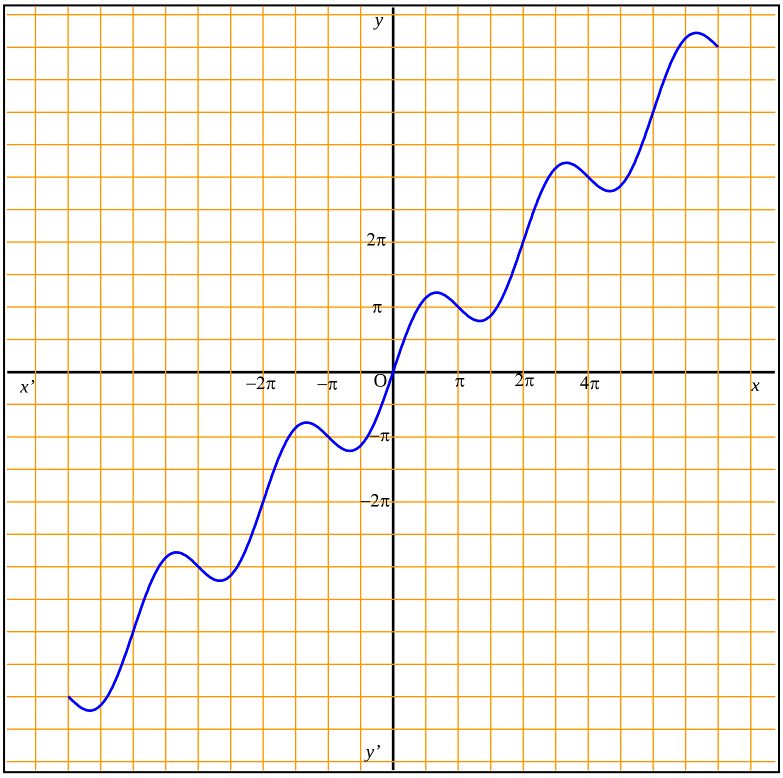
DEUX POINTS, UNE SEULE TANGENTE

Objectif	*Soulever le problème de l'existence d'une droite tangente à la courbe représentative d'une fonction en deux points distincts.*
Outils	*Dérivées. Fonction exponentielle (dernier exercice uniquement).*

Étant donné la courbe représentative d'une fonction dans le plan rapporté à un certain repère, existe-t-il deux points distincts de cette courbe tels que les tangentes à la courbe en ces points soient confondues ?[1]

Dans chacun des exercices suivants, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, d'une fonction f définie et dérivable sur un sous ensemble D de $\mathbf{R}$.

a étant un réel quelconque de D, on note Ta la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, m_a son coefficient directeur et p_a son ordonnée à l'origine.



A. Exercice 1

Soit f définie par $f(x) = x + 2\sin x$.

Vérifier que $\mathcal{C}$ admet une même tangente T en tous les points d'abscisses $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ et une même tangente T' en tous les points d'abscisse $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, k étant un entier relatif quelconque.

Tracer T et T' sur le graphique ci-contre.

[1] Le problème abordé ici, des tangentes confondues, n'est pas traité pour les courbes simples (hyperbole, parabole) parce que ces courbes n'en admettent pas et qu'il est aisé de l'établir.

B. Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$. $\mathcal{C}$ est donc une courbe « cubique ».

a. Pour tout réel a, exprimer m_a et p_a en fonction de a.

b. En déduire que les tangentes à $\mathcal{C}$ en deux points distincts de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives a et b ne sont jamais confondues.

c. Illustrer ce résultat en représentant sur l'écran de la calculatrice la fonction f correspondant à $p = -10$ et $q = 0$.

C. Exercice 3

Soit f définie par $f(x) = x^4 - 2\,x^2 + 1{,}5\,x$.

a. Pour tout réel a, exprimer m_a et p_a en fonction de $f(a)$ et $f\,'(a)$, puis en fonction de a.

b. a et b désignent deux réels distincts.
En utilisant m_a, p_a, m_b, p_b, démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux deux points d'abscisses a et b sont confondues si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ (a+b)\left[-3(a^2+b^2)+2\right] = 0 \end{cases}$$

c. Démontrer que ce système est vérifié dans les deux seuls cas suivants :

$$\begin{cases} a = -b \\ a^2 = 1 \end{cases} \text{ (cas 1)} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{2}{3} \\ ab = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ (cas 2)}$$

puis démontrer que le cas 2 implique $a = b$, et, donc, est exclu.

d. En déduire qu'il existe une seule droite tangente à $\mathcal{C}$ en deux points distincts et préciser quelle est cette droite.

e. Vérifier ce résultat sur l'écran d'une calculatrice.

D. Exercice 4

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - 2\mathrm{e}^x$.

Représenter f sur l'écran d'une calculatrice, puis démontrer, en étudiant les variations de la fonction $p\ :\ a \mapsto p_a = p(a)$, qu'il n'existe pas de droite du plan tangente à $\mathcal{C}$ en deux points distincts.

E. Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x) = \sin x$ (f est donc la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$).

Tracer $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice.

Semble-t-il exister une droite qui soit tangente à $\mathcal{C}$ en deux de ses points ? On se propose de démontrer cette conjecture.

a. Soit a un élément de $[-\pi\ ;\ \pi]$. Exprimer p_a en fonction de a.

b. Étudier les variations de la fonction p définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par $p\ :\ a \mapsto p_a = p(a)$.

c. En déduire que, si a est distinct de b, les tangentes en a et b sont distinctes.