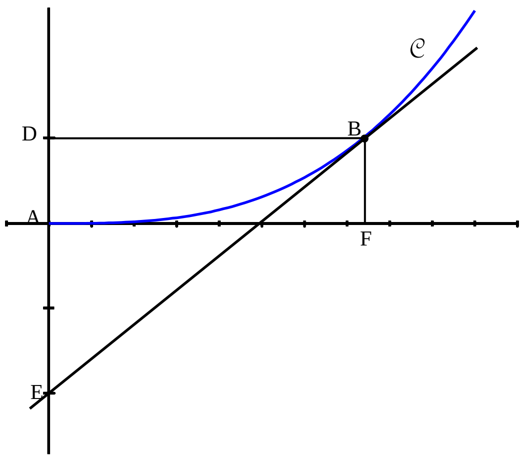
UNE TANGENTE CHEZ TORRICELLI

Objectif	*Justifier, avec les outils actuels, une méthode historique de construction de tangentes.*
Outils	*Coefficient directeur de la tangente. Dérivées des fonctions $x \mapsto x^p$ et $x \mapsto x^{-p}$ pour p entier naturel non nul.* *Cette séquence s'appuie sur un texte cité dans un article de F. de Gandt*

Il s'agit ici d'analyser une méthode de construction des tangentes à une courbe utilisée par Torricelli

A. Une méthode de Torricelli pour la construction d'une tangente



Evangelista Torricelli, qui vécut de 1608 à 1647, fut un mathématicien disciple de Galileo Galilei, dont il fut le secrétaire et auquel il succéda au poste de professeur de mathématiques à l'Académie de Florence. On reprend ici un de ses textes cité par F. de Gandt dans l'ouvrage collectif « Penser les mathématiques », collection « Points-Sciences », aux éditions du Seuil.

Dans ce texte[1], Torricelli donne une méthode pour construire une tangente quelconque à une courbe cubique, également appelée « parabole cubique ». En utilisant le langage mathématique actuel, une telle courbe est la représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{A}; \vec{i}; \vec{j})$, d'une fonction de la forme $x \mapsto k\,x^3$, $k \in \mathbf{R}^*$. Torricelli appelle « sommet » le point A et « diamètre », noté Δ, l'axe des ordonnées.

Il considère un point B quelconque de la courbe et note D son projeté orthogonal sur Δ. Il affirme (voir la figure) : *« Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, donc trois fois DA dans le cas présent, et la ligne qui joint EB sera la tangente… »*

Il faut comprendre que E est défini, en notations actuelles, par $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.

B. Explicitation et vérification de l'affirmation de Torricelli

Soit b l'abscisse du point B dans le repère $(\mathrm{A}; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer en fonction de k et de b le coefficient directeur de la droite T, tangente à $\mathcal{C}$ en B.

[1] La référence donnée par F. de Gandt est : *Opere*, 3 volumes en 4 tomes, Faënza, 1919, I, II, p. 311.

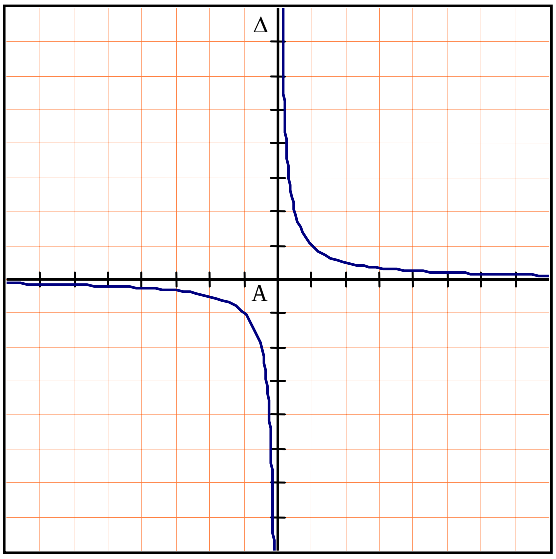
2. Après voir déterminé les coordonnées des points B, D et E, donner le coefficient directeur de la droite (EB).
3. Vérifier l'affirmation de Torricelli, suivant laquelle (EB) est la tangente à $\mathcal{C}$.

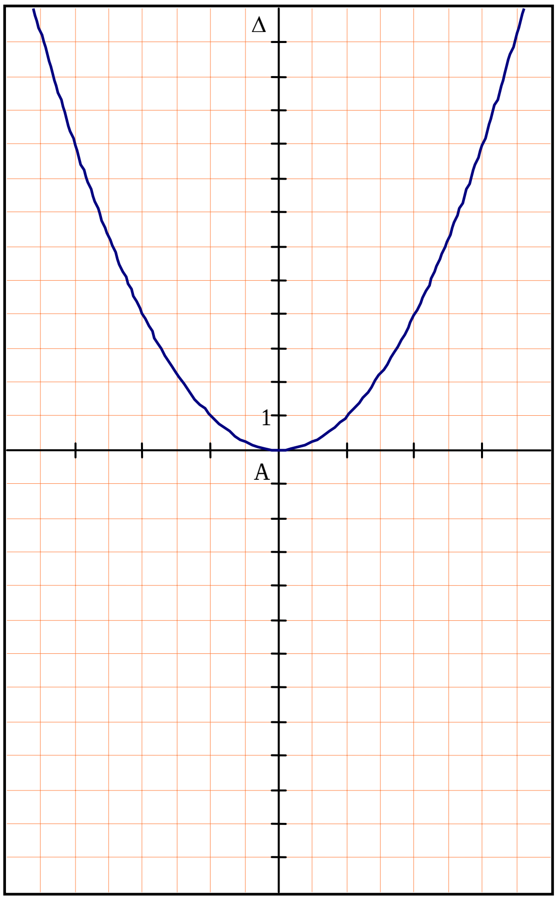
C. Généralisation de la méthode de Torricelli

De façon générale, Torricelli appelle « parabole » la courbe représentative dans un repère $(A;\vec{i};\vec{j})$ d'une fonction de la forme $x \mapsto k.x^p$, où $p \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{R}^*$. p est « l'exposant de la parabole ». Torricelli affirme que sa méthode s'applique à toute « parabole ».

« *Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, […], et la ligne qui joint EB sera la tangente…* » .

1. Énoncer avec précision une méthode de construction d'une tangente quelconque à $\mathcal{C}'$, d'après l'idée de Torricelli, puis justifier cette construction.
2. Utiliser la méthode de Torricelli pour construire diverses tangentes à la parabole (la vraie parabole, d'exposant 2) tracée sur la figure ci-contre.





3. Vérifier que la méthode de Torricelli décrite à la question 1 est encore valable si l'exposant p est un entier strictement négatif (dans ce cas A n'est plus située sur $\mathcal{C}'$).

   Dans le cas $p = -1$ la courbe est une hyperbole de centre A. Utiliser la méthode de Torricelli pour tracer diverses tangentes à cette hyperbole.

D. Remarque sur la démonstration donnée par Torricelli

Torricelli n'avait pas à sa disposition le concept de fonction, ni celui de nombre dérivé. Les démonstrations données au B et au C lui étaient donc inaccessibles. Les démonstrations originales de Torricelli sont de nature cinématique : elles reposent sur l'étude du mouvement d'un point décrivant la courbe considérée, et sur la considération de ce que nous appelons aujourd'hui le « vecteur vitesse instantanée » de ce point.