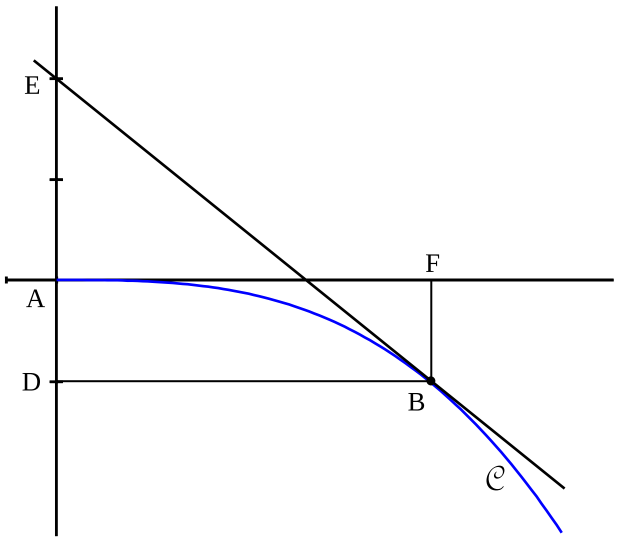
UNE TANGENTE PAR LA CINÉMATIQUE CHEZ TORRICELLI

Objectif	*Traduire dans le langage mathématique actuel un résultat et une démonstration historiques.*
Outils	*Courbes paramétrées.* *Cette séquence s'appuie sur un texte cité dans un article de F. de Gandt*

On analyse ici, dans le langage de la cinématique, une méthode de construction des tangentes à une courbe utilisée par Torricelli.

A. Une méthode de Torricelli pour la construction d'une tangente



Evangelista Torricelli, qui vécut de 1608 à 1647, fut un mathématicien disciple de Galileo Galilei, dont il fut le secrétaire et auquel il succéda au poste de professeur de mathématiques à l'Académie de Florence. On reprend ici un de ses textes cité par F. de Gandt dans l'ouvrage collectif « Penser les mathématiques », collection « Points-Sciences », aux éditions du Seuil.

Dans ce texte[1], Torricelli donne une méthode pour construire une tangente quelconque à une courbe cubique, également appelée « parabole cubique ». En utilisant le langage mathématique actuel, une telle courbe est la représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{A}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, d'une fonction de la forme $x \mapsto k\,x^3$, $k \in \mathbf{R}^*$. Torricelli appelle « sommet » le point A et « diamètre », noté Δ, l'axe des ordonnées. Il considère un point B quelconque de la courbe et note D son projeté orthogonal sur Δ. Il affirme (voir la figure) :

« Qu'on prenne ED égal à la longueur DA multipliée par l'exposant de la parabole, donc trois fois DA dans le cas présent, et la ligne qui joint EB sera la tangente… »

Il faut comprendre que E est défini, en notations actuelles, par $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.

B. Explicitation et vérification de l'affirmation de Torricelli

Soit b l'abscisse de B dans le repère $(\mathrm{A}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

1. Déterminer en fonction de k et de b le coefficient directeur de la droite T, tangente à $\mathscr{C}$ en B.

[1] La référence donnée par F. de Gandt est : *Opere*, 3 volumes en 4 tomes, Faënza, 1919, I, II, p. 311.

2. Après voir déterminé les coordonnées des points B, D et E, donner le coefficient directeur de la droite (EB).
3. Vérifier l'affirmation de Torricelli, suivant laquelle (EB) est la tangente à $\mathcal{C}$.

C. La démonstration de Torricelli

Cependant, Torricelli n'avait pas à sa disposition le concept de fonction, ni celui de nombre dérivé. La démonstration donnée au B. lui était donc inaccessible. Il ne pouvait aborder le concept de dérivée que sous son aspect de vitesse instantanée, et l'origine de son affirmation réside donc dans la cinématique, c'est-à-dire l'étude des mouvements. Voici la justification qu'il en donne :

« *En effet, le point mobile B qui décrit la parabole cubique possède deux vitesses instantanées*[2] *lorsqu'il est dans la position B :*

– une vitesse instantanée horizontale dirigée suivant la tangente AF,

– une vitesse instantanée perpendiculaire selon le diamètre AD.

On cherche le rapport de ces deux vitesses de la façon suivante : la vitesse instantanée horizontale, pendant le temps de chute, a fait parcourir l'espace DB, et de son côté la vitesse instantanée perpendiculaire, selon ce qui a été dit, ferait parcourir, pendant la durée de chute, si elle se conservait toujours égale, un espace triple de la chute AD ; par conséquent, le mouvement ou la direction du point B, qui est composé de deux vitesses qui sont l'une à l'autre comme BD à DE, se fera le long de la ligne BE ».

D. Explication de ce texte

Pour tenter de faire comprendre cette démonstration de Torricelli, nous allons la traduire dans le langage de la cinématique (ou des représentations paramétriques), et dans celui des vecteurs. Ces concepts n'existaient certes pas sous leur forme actuelle au temps de Torricelli, mais ils ne trahissent pas, nous semble-t-il, le raisonnement de ce grand mathématicien.

Torricelli considère que la courbe cubique $\mathcal{C}$ définie au B est décrite par un point mobile B, dont la vitesse horizontale (suivant (Ax)) est constante. Il sous-entend que le point B suit la loi horaire, ou représentation paramétrique : $x = f(t) = t$; $y = g(t) = k.t^3$.

1. Soit $\overrightarrow{V(t)}$ le vecteur dérivé à l'instant t de cette représentation paramétrique, appelé aussi « vecteur vitesse instantanée ». Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{V(t)}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$, que Torricelli appelle respectivement « vitesse instantanée horizontale » et « vitesse instantanée perpendiculaire ».

2. Vérifier les affirmations suivantes, qui sont celles de Torricelli adaptées en langage moderne :
   « La vitesse instantanée horizontale, pendant le temps de chute entre les instants 0 et t provoque le déplacement $\overline{\mathrm{DB}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{D}}$, et de son côté, la vitesse instantanée perpendiculaire à l'instant t, si elle se conservait égale entre les instants 0 et t, provoquerait un déplacement triple de $\overline{\mathrm{AD}} = y_{\mathrm{D}} - y_{\mathrm{A}}$ ».

3. En déduire que, pour $t \neq 0$, $\dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{\overline{\mathrm{ED}}}{\overline{\mathrm{DB}}}$, traduction de l'affirmation suivante de Torricelli : « *les deux vitesses sont l'une à l'autre comme BD à DE* ».

4. Déduire du 3 que les vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ sont colinéaires, puis que la droite (EB) est la tangente en B à $\mathcal{C}$.

[2] On traduit ici le mot latin « impetus », dont le sens est imprécis et multiple dans la Physique du XVII^e^ siècle, par l'expression « vitesse instantanée », qui convient pour ce texte.