V – Dérivée et monotonie

PROBLÈME ANALYTICO-ÉLECTRIQUE

Objectif	*Montrer l'utilité de l'Analyse pour résoudre un problème de physique.*
Outils	*Lien entre signe de la dérivée et monotonie.*

On monte en série un générateur de tension, de force électromotrice E donnée, avec un conducteur ohmique de résistance R. On note r la résistance du montage autre que R (résistance interne du générateur, augmentée de celle des fils de branchement, etc.).

Soit Q la chaleur fournie par effet Joule par ce conducteur pendant le temps t et P la puissance dégagée. On a $Q = P\,t$.

Quelle doit être la valeur de la résistance R pour que la puissance (et donc la chaleur) dégagée soit maximale ?

Référence : Cours élémentaire de Mathématiques supérieures,
Tome 2,Fonctions, p. 89, J. Quinet, éd. Dunod.

1. Exprimer P à l'aide de R et I, où I est l'intensité du courant dans le circuit.

   Justifier que $I = \dfrac{E}{r+R}$.

   En déduire l'expression de P en fonction de E, r et R.

2. Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+r)^2}$, r étant un réel strictement positif donné.

   Étudier les variations de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

3. a. Trouver une relation entre P et $f(R)$.

   b. Déduire de l'étude précédente la valeur de R cherchée.

4. Complément.

   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b. Quelle interprétation physique en déduit-on pour l'effet Joule fourni par le conducteur ?

ZÉROS DE LA DÉRIVÉE

Objectif	*Rechercher des conditions pour une monotonie stricte.*
Outils	*Nombre dérivé.*

À quelles conditions une fonction f, dérivable sur un intervalle I, est-elle strictement monotone sur cet intervalle ?

A. Conditions de monotonie sur un intervalle pour une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout x_0 de I on a : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1. Supposons que f soit constante sur I.

   Alors, pour tout x de I, avec $x \neq x_0$, on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ et donc $f'(x_0) = 0$.

   Supposons que f soit croissante sur I.

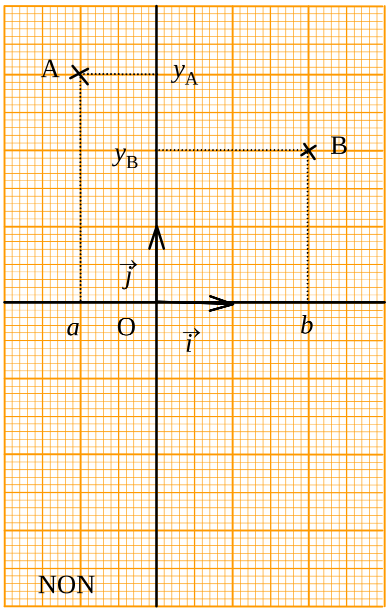
   Alors, pour tout x de I, avec $x \neq x_0$, on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ et donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ d'où $f'(x_0) \geq 0$

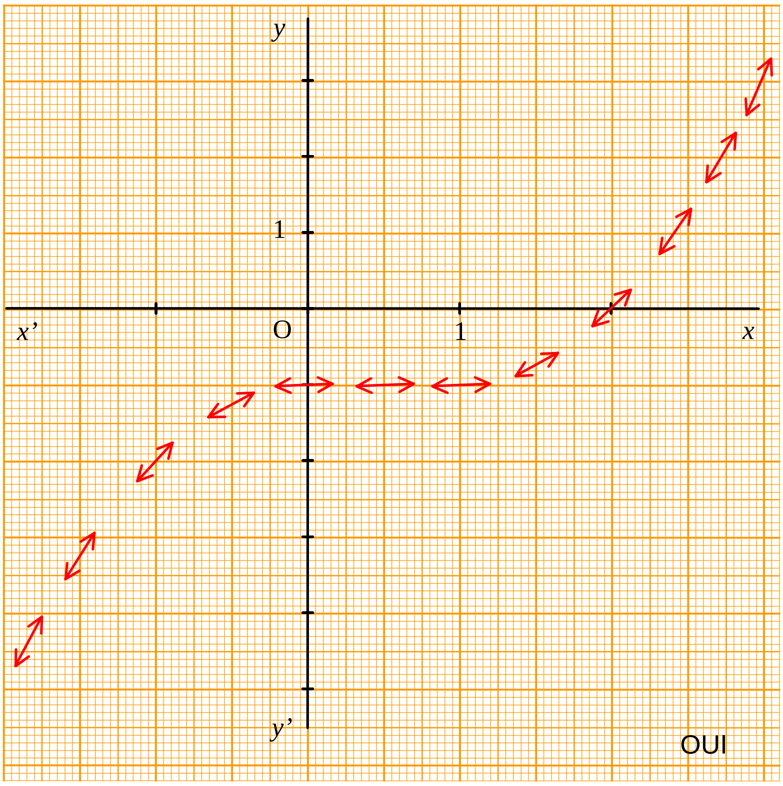
2. Réfléchissons aux réciproques à l'aide d'un graphique.

   Supposons que f soit telle que, pour tout réel x de I, on ait : $f'(x) \geq 0$. Notons Γ sa courbe représentative dans un repère.

   Supposons que f ne soit pas croissante sur I. Il existe donc deux réels a et b de I tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit A et B les points de Γ d'abscisses respectives a et b. On a donc $y_{\mathrm{A}} > y_{\mathrm{B}}$.

   Parait-il possible de tracer entre A et B la courbe représentative d'une fonction f vérifiant ces hypothèses ?





Nous admettrons la réciproque.
Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME 1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, on $f'(x) = 0$. (1a)
- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, on $f'(x) \geq 0$. (1b)
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, on $f'(x) \leq 0$. (1c)

B. Conditions de stricte monotonie sur un intervalle pour une fonction dérivable

1. Recherche de conditions suffisantes : combien de zéros pour la dérivée ?

Exemple 1. Aucun zéro.

Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^3 + x$.

- f_1 est la somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ strictement croissantes sur $\mathbf{R}$

  f_1 est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

- f_1 étant une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour tout réel x : $f_1'(x) = 3x^2 + 1$.

  Donc $f_1'(x) > 0$ pour tout réel x.

Exemple 2. Un zéro.

Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_2(x) = (1 - x)^3$

f_2 est la composée de la fonction $x \mapsto 1 - x$ par la fonction $x \mapsto x^3$.

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto 1-x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R} \\ x \mapsto x^3 \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R} \end{array}\right\} \text{ donc } f_2 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto 1-x \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \\ x \mapsto x^3 \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \end{array}\right\} \text{ donc } f_2 \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \text{ et pour tout réel } x \text{ on a : } f_2'(x) = -3(1-x)^2.$$

$f_2'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ et, pour tout réel x différent de 1, $f_2'(x) > 0$.

Exemple 3. Deux zéros.

Soit f_3 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_3(x) = \cos(x)$.

- la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[\, 0 \,;\, \pi \,]$ (résultat du cours) ;
- la fonction cosinus est dérivable sur $[\, 0 \,;\, \pi \,]$ (résultat du cours).

  Pour tout réel x de $[\, 0 \,;\, \pi \,]$ on a $f_3'(x) = -\sin(x)$.

  $f_3'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \pi$ et pour tout réel x de $]\, 0 \,;\, \pi \,[$ on a : $f_3'(x) < 0$.

f étant une fonction dérivable sur un intervalle I, montrons que la condition

(C) : « $f' > 0$ sauf en un nombre fini de réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ »

est une condition suffisante pour que f soit strictement croissante sur I.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et vérifiant la condition (C).

- Pour tout réel x de I on a $f'(x) \geq 0$, donc, d'après le théorème (1b), f est croissante sur I.
- Supposons que f ne soit pas strictement croissante sur I.

  Alors il existe deux réels a et b de I, avec $a < b$, vérifiant $f(a) = f(b)$.

  Comme f est croissante sur I, pour tout réel c de $[\, a \,;\, b \,]$ on a : $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$.

  On en déduit donc que, pour tout réel c de $[\, a \,;\, b \,]$, on a : $f(a) = f(c) = f(b)$; f est donc constante sur $[\, a \,;\, b \,]$, et donc, d'après le théorème 1 (1a), pour tout réel x de $[\, a \,;\, b \,]$, on a : $f'(x) = 0$.

  f' s'annule donc pour une infinité de valeurs, ce qui contredit l'hypothèse.

  Donc f est strictement croissante sur I.

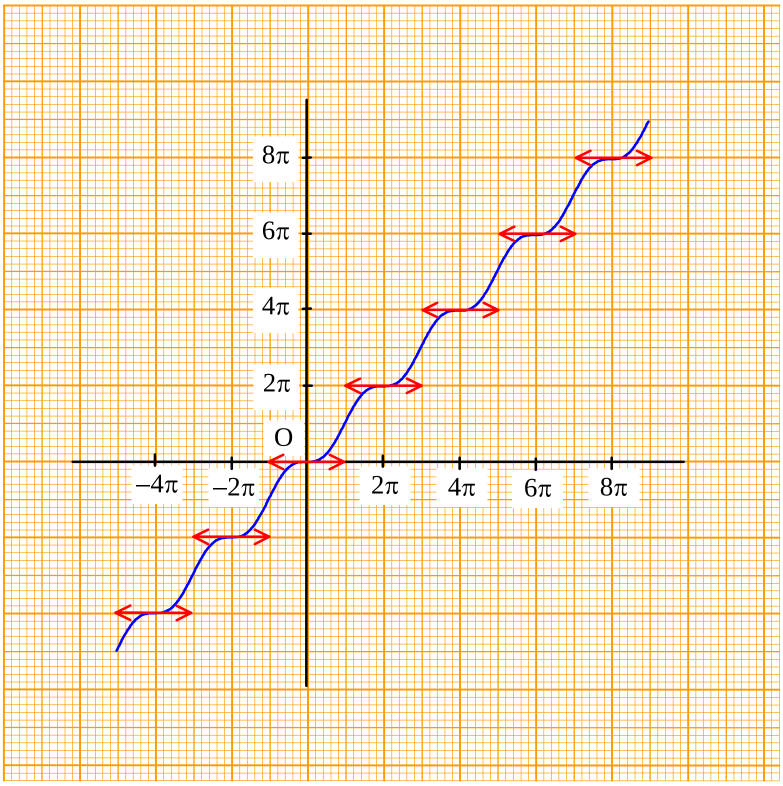
Ainsi nous avons le théorème :

> THÉORÈMES
> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
> - Si f' est strictement positive sur I, sauf en un nombre fini de réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur I. (2a)
> - Si f' est strictement négative sur I, sauf en un nombre fini de réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante sur I. (2b)

2. Recherche de conditions nécessaires : quel ensemble de zéros pour la dérivée ?

Exemple 4. Une infinité de zéros.

Soit f_4 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_4(x) = x - \sin(x)$.



- f_4 est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, et pour tout réel x : $f_4'(x) = 1 - \cos(x)$, donc pour tout réel x : $f_4'(x) \geq 0$.

- $f_4'(x) = 0$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = 2k\pi$;

  f_4' s'annule donc pour une infinité de réels.

- Pourtant f_4 est strictement croissante sur $\mathbf{R}$; en effet :
  - pour tout entier naturel non nul k, f_4' s'annule pour un nombre fini de réels de $[-2k\pi ; 2k\pi]$, donc, d'après le théorème 2, f_4 est strictement croissante sur $[-2k\pi ; 2k\pi]$;
  - soit deux réels a et b tels que $a < b$, il existe un entier naturel non nul k tel que $[a ; b] \subset [-2k\pi ; 2k\pi]$. f étant strictement croissante sur $[-2k\pi ; 2k\pi]$ on a : $f(a) < f(b)$.

Donc f_4 est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

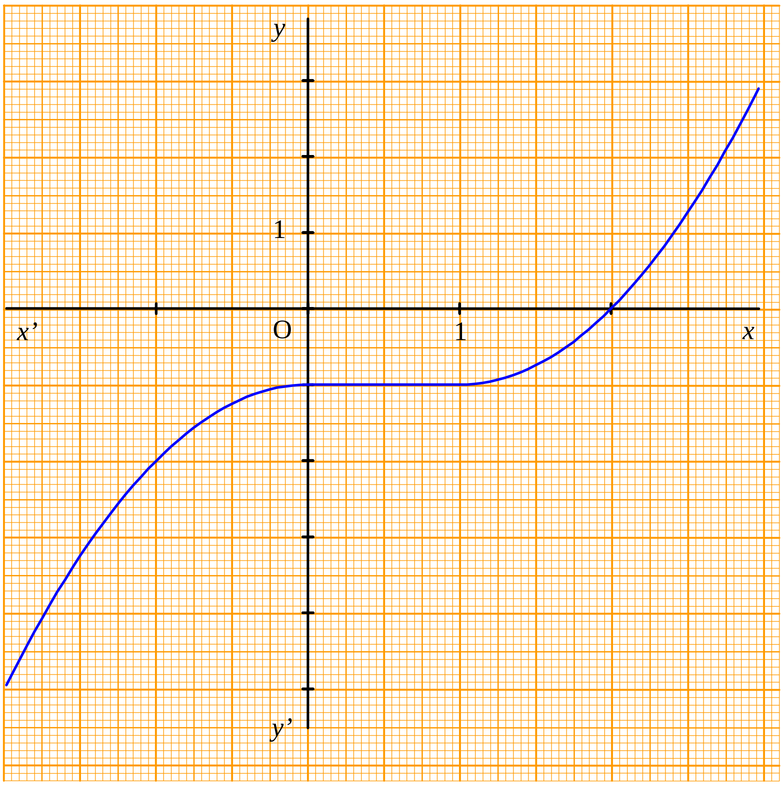
La condition (C) n'est donc pas nécessaire !

Exemple 5. Une infinité de zéros.

Soit f_5 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\begin{cases} f_5(x) = -x^2 - 1 & \text{pour } x \in \left]-\infty\,;0\right]; \\ f_5(x) = -1 & \text{pour } x \in \left]0\,;1\right]\ ; \\ f_5(x) = (x-1)^2 - 1 & \text{pour } x \in \left]1\,;+\infty\right[. \end{cases}$

- f_5 est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x, on a $f_5'(x) \geq 0$ donc, d'après le théorème (1b), on en déduit que f_5 est croissante sur $\mathbf{R}$.

- Cependant f_5 est constante sur $]\,0\,;1\,[$ et donc f_5 n'est pas strictement croissante sur $\mathbf{R}$.



f étant une fonction dérivable sur un intervalle I, montrons que la condition (C') : « pour tout réel x de I on a : $f'(x) \geq 0$ et l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide » est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit strictement croissante sur I.

Démonstration

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et vérifiant la condition (C').

- Pour tout réel x de I on a : $f'(x) \geq 0$, donc, d'après le théorème 1, f est croissante sur I.
- Supposons que f ne soit pas strictement croissante sur I.

  Alors il existe deux réels a et b de I, avec $a < b$, vérifiant $f(a) = f(b)$.

  Comme f est croissante sur I, pour tout réel c de $[\,a\,;b\,]$ on a : $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$.

  On en déduit donc que, pour tout réel c de $[\,a\,;b\,]$, on a : $f(a) = f(c) = f(b)$; f est donc constante sur $[\,a\,;b\,]$, et donc, d'après le théorème 1, pour tout réel x de $[\,a\,;b\,]$, on a : $f'(x) = 0$.

  Donc l'ensemble des réels x pour lesquels $f'(x) = 0$ contient un intervalle ouvert non vide, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc f est strictement croissante sur I.

2. Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur un intervalle I.

- D'après le théorème 1, pour tout x de I, on a $f'(x) \geq 0$.

- Supposons que l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ contienne un intervalle ouvert $]\,a\,;\,b\,[$ non vide, alors, d'après le théorème 1, f est constante sur $]\,a\,;\,b\,[$ et donc f n'est pas strictement croissante sur I, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi nous avons le théorème

> THÉORÈME 3
> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
> - f est strictement croissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ et si l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide.
> - f est strictement décroissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ et si l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide.

C. Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;\,1\,]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2} - \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]\,0\,;\,1\,]$ et que, pour tout réel x de $]\,0\,;\,1\,]$, on a :
$$f'(x) = \frac{-\dfrac{2}{x^3}\left[1-\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}{\left[\dfrac{1}{x^2}-\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]^2}.$$

2. a. Résoudre dans **Erreur ! Des objets ne peuvent pas être créés à partir des codes de champs de mise en forme.** l'équation : $f'(x) = 0$.

   b. Soit E l'ensemble des réel de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}$, avec k entier naturel non nul.

   Montrer, par l'absurde, que E ne contient aucun intervalle ouvert non vide.

> Aide : si $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2(k+1)\pi}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right] \subset E$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}} \in E$; or $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}\right) \neq 0\ldots$

3. Conclure.

ÉTUDE DE MONOTONIE

Objectif	*Étudier le sens de variation d'une fonction avec ou sans la dérivée.*
Outils	*Théorèmes sur les fonctions monotones (somme, produit, composée, parité).* *Théorème sur le sens de variation à partir du signe de la dérivée.*

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle, on peut aussi utiliser les résultats sur :

- les inégalités ;
- la composée de deux fonctions monotones ;
- la somme de deux fonctions de même monotonie ;
- le produit de deux fonctions positives de même monotonie ;
- les variations d'une fonction paire ou impaire sur tout son ensemble de définition D à partir de la monotonie de cette fonction sur $D \cap [\, 0 \,;+\infty\, [$;
- le signe de la dérivée quand elle existe.

Quel est, dans chaque cas, la méthode la plus appropriée ?

Exercice 1

Choisir la méthode qui semble la plus appropriée pour établir le sens de variation de la fonction f définie sur $]-1\,;0\,]$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)}}{1+x^3}$.

Exercice 2

Même question pour la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x)=\cfrac{1}{x^3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x^2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}$

Exercice 3

On suppose connue la fonction partie entière, notée : $x \mapsto \mathrm{E}(x)$. Cette fonction est croissante sur $\mathbf{R}$.

En déduire le sens de variation sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de $h_1 : x \mapsto \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et, sur $[\,0\,;+\infty\,[$, de $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{E}(x)^2+1}$

On esquissera la courbe représentative de h_1 sur $]\,0\,;2\,[$, et celle de h_2 sur $[\,0\,;5\,[$.

Exercice 4

Soit la fonction f de la variable réelle définie par $f(x) = \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2+4}$.

Après avoir justifié l'écriture suivante de $f(x)$: $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2+4}}$, on étudiera le sens de variation de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par les deux méthodes :

- étude du signe de la dérivée
- utilisation des résultats cités en introduction.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $r(x) = \sqrt{1-x^4}$.

1. r n'est pas dérivable en 1.
   a. Démontrer, grâce à l'étude du signe de la dérivée, que r est décroissante sur $[\,0\,;1\,[$.
   b. Établir le sens de variation de r sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Établir le sens de variation de r sur $[\,0\,;1\,]$ sans utiliser la dérivée.
3. Comparer les deux méthodes.
4. En utilisant la parité de r, déduire les variations de r sur l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$.

La réfraction fait réfléchir Leibniz

Objectif	*Faire l'étude mathématique d'un texte historique.*
Outils	*Dérivée. Variation de la composée.* *Prolongement de la monotonie par continuité.*

Il s'agit de résoudre le problème de la réfraction traité par Leibniz par une méthode tout à fait semblable à celle qu'il employa, mais en utilisant la dérivée plutôt que les différentielles.

A. Présentation du problème

L'article « *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus (Nouvelle méthode pour chercher les Maximums et les Minimums, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les exposants fractionnaires et irrationnels, accompagnée du calcul original qui s'y applique*[1]*)* », publié par Leibniz en 1684, est l'un des textes fondateurs de l'Analyse.

L'auteur y présente ses fameuses différentielles. En effet le calcul infinitésimal chez Leibniz repose sur la notion plus ou moins intuitive de différentielle, plutôt que sur celle de dérivée. Leibniz introduit donc d'abord ses notations dx, dy, … encore en usage aujourd'hui, puis indique les règles de calcul à leur égard, $d(\frac{x}{y})$ par exemple, ou $d(\sqrt[b]{x^a})$.

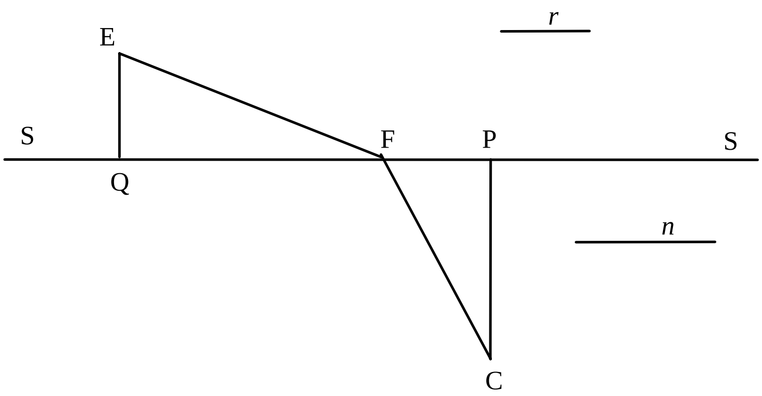
Pour finir, il présente les premières applications de ce calcul :

- détermination de la tangente quelconque à la courbe d'équation $x : y + (a + bx)(c - xx)$: carré de $(ex + fxx) + ax\sqrt{(gg + yy)} + yy : \sqrt{(hh + lx + mxx)} = 0$;
- détermination de la tangente à la courbe formée des points M tels que la somme des distances de M à sept points alignés donnés soit égale à un nombre donné ;
- solution d'une équation différentielle donnée sous une forme géométrique (recherche des courbes à sous-tangente constante) ;
- détermination d'extremum appliquée à un problème important en physique, la loi de réfraction de Descartes, qui est présenté ci-dessous.

[1] Traduction Marc Parmentier (Leibniz, Naissance du Calcul Différentiel, chez Vrin)

Texte de Leibniz

Étant donnés deux points C et E et la droite SS dans le même plan, nous cherchons quel point F il faut prendre sur SS pour que, une fois tracés CF et EF, la somme du produit de CF par une donnée n, *et du produit de EF par la constante* r, *soit la plus petite possible ; si SS est la frontière entre deux milieux,* n *représentant la densité du côté de C, par exemple de l'eau, et* r *la densité du côté de E, par exemple de l'air, nous cherchons donc le point F tel que de tous les points allant de C à E, celui passant par lui soit le plus commode. […] Je noterai* w, *toutes les sommes possibles de ces deux produits, soit toutes les difficultés possibles des chemins ; nous cherchons leur minimum. Puisque les points C et E sont donnés, le seront aussi les perpendiculaires à SS, savoir CP (que je noterai* c*), EQ (*e*), enfin PQ (*p*). QF […] je l'appellerai* x*, CF, f, et EF, g; nous aurons FP* $= p - x$, $f = \sqrt{cc + pp - 2px + xx}$ *soit en abrégé* $\sqrt{l}$ *et g égal à* $\sqrt{ee + xx}$ *, en abrégé* $\sqrt{m}$ *. Nous avons donc* $w = n\sqrt{l} + r\sqrt{m}$ *d'où en appliquant les règles de calcul que j'ai indiquées (puisque si* w *est minimal,* $dw = 0$*) :* $0 = + ndl : 2\sqrt{l} + rdm : 2\sqrt{m}$ *; or* dl *est* $-2\,dx\,(p - x)$ *et* $dm = 2x\,dx$*, il vient donc :* $n\,(p - x) : f = rx : g$*. Si on adapte ceci à la dioptrique […], les sinus des angles d'incidence et de réfraction sont respectivement proportionnels à* r *et* n*, densités des milieux dans lesquels ont lieu [respectivement] la réfraction et l'incidence. Il ne faut pas considérer que cette densité est déterminée à notre guise, mais par la résistance que les milieux opposent aux rayons lumineux. Nous en déduisons la démonstration d'un calcul que j'ai déjà donné dans les Acta, en exposant le principe général de l'Optique, de la Catoptrique et de la Dioptrique. Or d'autres très éminents Savants*[2] *ont dû en passer par de multiples détours pour débusquer des résultats que toute personne accoutumée au présent calcul*[3] *établira à l'avenir en trois lignes.*



Introduction

Leibniz admet qu'entre deux points d'un plan, même situés dans deux milieux différents, la lumière emprunte toujours le trajet permettant le temps de parcours minimal. Ce principe fut d'abord énoncé par Pierre de Fermat (1601-1665)[4]. À partir de ce principe d'optique et de son nouveau calcul différentiel, Leibniz entreprend de démontrer la seconde loi de Descartes sur la diffraction, qui affirme que lorsqu'un rayon de lumière passe d'un milieu d'indice n à un milieu d'indice r, son trajet obéit à la formule: $n.\sin(a) = r.\sin(b)$, a et b étant respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction.

---

[2] Leibniz fait ici référence à Descartes et Fermat. Leibniz est un peu injuste envers Fermat (1601-1665), dont Leibniz reprend la démonstration, enrichie il est vrai de ses propres idées novatrices. Les calculs de Fermat n'étaient au demeurant pas si laborieux ! Leibniz plaide sa cause avec un peu d'exagération.

[3] Le "Calcul Infinitésimal", ou encore "Analyse Supérieure " de Leibniz, que l'article cité inaugure.

[4] Ce principe est donc encore appelé : "Principe de Fermat".

B. Problème

Soit deux points C et E situés dans des milieux d'indices respectifs n et r. (SS') est la droite séparant les milieux, P et Q les projetés orthogonaux respectifs de C et E sur (SS'), F est le point de [PQ] tel que $\mathrm{QF} = x$. On pose $\mathrm{QE} = e$, $\mathrm{CP} = c$, $\mathrm{PQ} = p$.

On rappelle que dans un milieu d'indice n, la vitesse de la lumière est $\dfrac{c_0}{n}$, c_0 étant la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Calculer en fonction de x le temps mis par la lumière pour parcourir le trajet CFE.
   On note $T(x)$ ce temps, ce qui définit une fonction T sur l'intervalle $[\,0\,;\,p\,]$.

2. Calculer $T'(x)$.

3. On note $\alpha = \widehat{\mathrm{FCP}}$ et $\beta = \widehat{\mathrm{FEQ}}$. Démontrer que : $T'(x) = \dfrac{1}{c_0}\cdot\left[r\sin(\beta) - n\sin(\alpha)\right]$.

   En déduire que, **s'il existe un trajet optimal**, il est obtenu lorsque : $n.\sin(\alpha) = r.\sin(\beta)$. Ce qui démontre bien la seconde loi de Descartes.

   Leibniz, dont la démonstration était essentiellement celle que nous venons de faire note non sans fierté : « *Or d'autres très éminents Savants ont dû en passer par de multiples détours pour débusquer des résultats que toute personne accoutumée au présent calcul établira à l'avenir en trois lignes.* »

   Pensez vous être déjà une de ces personnes « *accoutumées au calcul infinitésimal* » et bon disciple de Leibniz ?

4. Leibniz ne se posait pas la question de l'existence de ce trajet optimal, qui pour lui était une évidence physique. Il est possible cependant de prouver l'existence d'un minimum de la fonction T.

   a. Démontrer que, pour tout $x \in\ ]\,0\,;\,p\,[$, $T'(x) = \dfrac{1}{c_0}\left[r\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{e^2}{x^2}}} - n\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{c^2}{(p-x)^2}}}\right]$

   b. En déduire, sans nouveau calcul de dérivée, que la fonction T' est croissante sur $]\,0\,;\,p\,[$, puis sur $[\,0\,;\,p\,]$. Calculer $T'(0)$ et $T'(p)$. Conclure.

C. Récréation. Comme Leibniz ?

Voici sur le même sujet et avec les mêmes notations un raisonnement que l'on pourrait être tenté de tenir.

On note v_1 la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice n, et v_2 la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice r. Le temps mis pour parcourir [CF] est $t_1 = \dfrac{\mathrm{CF}}{v_1}$; le temps mis pour parcourir [FE] est $t_2 = \dfrac{\mathrm{FE}}{v_2}$. Le temps total de parcours est $t_1 + t_2$.

Par ailleurs : $\sin(\alpha) = \dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{CF}}$, d'où $\mathrm{CF} = \dfrac{p-x}{\sin(\alpha)}$; $\sin(\beta) = \dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{FE}}$, d'où $\mathrm{FE} = \dfrac{x}{\sin(\beta)}$

Le temps total de parcours est donc $T(x) = \dfrac{p-x}{v_1 \sin\alpha} + \dfrac{x}{v_2 \sin\beta}$.

Le minimum est atteint pour la valeur de x qui annule la dérivée.

Or $T'(x) = \dfrac{-1}{v_1 \sin\alpha} + \dfrac{1}{v_2 \sin\beta}$ et $T'(x) = 0$ si et seulement si $v_1\sin(\alpha) = v_2\sin(\beta)$.

Conclusion : le trajet de la lumière vérifie la relation remarquable $v_1\sin(\alpha) = v_2\sin(\beta)$.

Arrive-t-on à la même conclusion que Leibniz ?

Quel est le raisonnement correct ? Pourquoi ?

DÉRIVÉE POSITIVE ET DÉCROISSANTE

Objectif	*Interpréter graphiquement des propriétés de la fonction dérivée.*
Outils	*Théorème des inégalités des accroissements finis.*

Nous nous intéressons dans cet exercice à une fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

- f est dérivable sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$
- $f\,'$ est une fonction positive et décroissante sur l'intervalle. $]\,0\,;+\infty\,[$.

Nous allons voir que ces hypothèses permettent d'obtenir différents résultats sur la courbe représentative de f, pour des abscisses tendant vers $+\infty$.

A. Préliminaire

Comment traduire graphiquement le fait que $f\,'$ est positive et décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$?

Esquisser la courbe d'une fonction vérifiant ces deux hypothèses.

B. Propriété fondamentale de $f\,'$

On peut démontrer et on admettra que $f\,'$ admet une limite A en $+\infty$ et que A minore $f\,'$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, il existe un nombre réel strictement positif α tel que, pour tout x élément de $[\,\alpha\,;+\infty\,[$, on a $A \leq f\,'(x) \leq A+10^{-n}$.

C. Courbe représentative de f sur $[\,x_0\,;x_0+1\,]$

1. Exemple

Soit g la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g(x)=x+\sqrt{x}$.

Démontrer que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées pour la fonction g .

Déterminer la valeur de A.

Démontrer que si $x \geq 25$ alors $1 \leq g'(x) \leq 1{,}1$.

En déduire, en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, que, pour tout x de $[\,25\,;26\,]$, on a $5+x \leq f(x) \leq 5{,}1+x$.

Tracer les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y=5+x$ et $y=5{,}1+x$ ainsi que la courbe représentative de g sur l'intervalle $[\,25\,;26\,]$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, l'unité étant 5 centimètres.

2. Cas général

Nous reprenons ici les notations de la partie B.

Soit x_0 un nombre réel supérieur ou égal à α.

En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[x_0 ; x_0 + 1]$, on a : $f(x_0) + A(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + A(x - x_0) + 10^{-n}$.

En déduire l'existence d'une droite Δ dépendant de x_0, dont on donnera l'équation, telle que, pour tout x de l'intervalle $[x_0 ; x_0 + 1]$, la distance entre les points d'abscisse x sur la courbe $\mathcal{C}$ et sur la droite Δ soit majorée par 10^{-n}.

En conclusion, pour tout x_0 nombre réel positif suffisamment grand, la représentation graphique de f sur l'intervalle $[x_0 ; x_0 + 1]$ est très proche d'une droite dépendant de x_0.

D. Résultat sur la droite (OM), M étant un point de $\mathcal{C}$.

1. Exemple

Soit g la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g(x) = x + \sqrt{x}$.

Démontrer que si $x \geq 100$ alors $1 \leq \frac{g(x)}{x} \leq 1{,}1$.

Démontrer que si $x \geq 10\,000$ alors $1 \leq \frac{g(x)}{x} \leq 1{,}01$.

En déduire que, M étant un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse supérieure à 10 000, la droite (OM) est « coincée » entre les droites d'équations $y = x$ et $y = 1{,}01x$.

2. Cas général

On utilise de nouveau les notations de la partie B.

En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$, démontrer que, pour tout réel x de cet intervalle, on a $f(\alpha) + A(x - \alpha) \leq f(x) \leq f(\alpha) + (A + 10^{-n})(x - \alpha)$.

En déduire que, pour tout réel x de cet intervalle, on a $f(\alpha) - A\alpha \leq f(x) - Ax \leq f(\alpha) + 10^{-n}x$, puis que $\frac{f(\alpha)}{x} - \frac{A\alpha}{x} \leq \frac{f(x)}{x} - A \leq \frac{f(\alpha)}{x} + 10^{-n}$.

Soit $x \in [\alpha ; +\infty[$ et suffisamment grand pour que : $\frac{f(\alpha)}{x} - \frac{A\alpha}{x} \geq -2 \times 10^{-n}$ et pour que $\frac{f(\alpha)}{x} \leq 10^{-n}$.

En déduire qu'alors on a: $-2 \times 10^{-n} \leq \frac{f(x)}{x} - A \leq 2 \times 10^{-n}$.

En conclusion, si D désigne la droite d'équation $y = Ax$ et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x, le raisonnement ci-dessus montre que, si x est suffisamment grand, le coefficient directeur de la droite (OM) est très proche de celui de D ; en fait, l'angle entre la droite (OM) et D devient aussi proche de l'angle nul qu'on le désire.

MONOTONE À EN PRENDRE LA TANGENTE

Objectif	*Mettre en évidence la relation qu'il y a entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.*
Outils	*Dérivées*

L'objet de cette activité est de mettre en évidence la relation entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.

Dans toute cette activité, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$. Pour un élément x quelconque de I, on nomme M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et $\mathrm{T_M}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M.

A. De la monotonie de la dérivée à la position relative courbe / tangentes

1. Exemples

Exemple 1

On prend pour fonction f la fonction $x \mapsto e^x$ et pour intervalle I l'ensemble $\mathbf{R}$.

a. Quel est le sens de variation de la dérivée f' ?

b. Écrire l'équation réduite $y = k(x)$ de la tangente $(\mathrm{T_{M_0}})$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $\mathrm{M_0}$ d'abscisse x_0.

c. Étudier le signe de la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - k(x)$ (si nécessaire on pourra étudier d'abord le sens de variation de φ).

d. En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathrm{T_{M_0}}$ pour des abscisses éléments de I.

Exemple 2

On prend pour fonction f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et pour intervalle I l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.

Traiter alors les questions a, b, c, d précédentes avec x_0 élément quelconque de I.

Exemple 3

On prend pour fonction f la fonction $x \mapsto \tan x$ et pour intervalle I l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Traiter alors les questions a, b, c, d précédentes avec $x_0 = 0$.

2. Théorèmes

a. On prend pour fonction f une fonction dont la dérivée f' est croissante sur I.

Traiter alors les questions b, c, d telles qu'elles sont formulées dans la question 1.

Énoncer le théorème démontré (théorème 1).

b. On prend pour fonction f une fonction dont la dérivée f' est décroissante sur I.

Formuler un théorème analogue au théorème 1 précédent (théorème 2).

Démontrer ce théorème (on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$ pour tout x élément de I et lui appliquer le théorème 1 précédent).

B. Réciproques

Dans cette partie, on suppose que tout point M de $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_M.

1. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$, A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.
   a. Démontrer que le coefficient directeur de la tangente T_A est inférieur au coefficient directeur de la droite (AB), lui-même inférieur au coefficient directeur de la tangente T_B.
   b. En déduire que la fonction f' est croissante sur I.

2. Énoncer le théorème démontré (réciproque du théorème 1).
   Énoncer de manière analogue la réciproque du théorème 2.

C. Application des théorèmes directs

On dit qu'un point M_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en M_0 et si $\mathcal{C}_f$ traverse cette tangente en x_0 .

Démontrer que, si la fonction f' admet un extremum en x_0 alors M_0 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Donner des exemples de fonctions dont la courbe admet un point d'inflexion.