# DÉRIVÉE POSITIVE ET DÉCROISSANTE

| | |
|---|---|
| ***Objectif*** | *Interpréter graphiquement des propriétés de la fonction dérivée.* |
| ***Outils*** | *Théorème des inégalités des accroissements finis.* |

Nous nous intéressons dans cet exercice à une fonction $f$ définie sur l'intervalle $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

- $f$ est dérivable sur l'intervalle $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$
- $f\,'$ est une fonction positive et décroissante sur l'intervalle. $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$.

Nous allons voir que ces hypothèses permettent d'obtenir différents résultats sur la courbe représentative de $f$, pour des abscisses tendant vers $+\infty$.

## A. Préliminaire

Comment traduire graphiquement le fait que $f\,'$ est positive et décroissante sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$ ?

Esquisser la courbe d'une fonction vérifiant ces deux hypothèses.

## B. Propriété fondamentale de $f\,'$

On peut démontrer et on admettra que $f\,'$ admet une limite $A$ en $+\infty$ et que $A$ minore $f\,'$ sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n$, il existe un nombre réel strictement positif $\alpha$ tel que, pour tout $x$ élément de $[\, \alpha \,;\, +\infty\, [$, on a $A \leq f\,'(x) \leq A + 10^{-n}$ .

## C. Courbe représentative de $f$ sur $[\, x_0 \,;\, x_0 + 1\, ]$

### 1. Exemple

Soit $g$ la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g(x) = x + \sqrt{x}$ .

Démontrer que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées pour la fonction $g$ .

Déterminer la valeur de $A$.

Démontrer que si $x \geq 25$ alors $1 \leq g\,'(x) \leq 1{,}1$.

En déduire, en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, que, pour tout $x$ de $[\, 25 \,;\, 26\, ]$, on a $5 + x \leq f(x) \leq 5{,}1 + x$ .

Tracer les droites $\mathrm{D}_1$ et $\mathrm{D}_2$ d'équations respectives $y = 5 + x$ et $y = 5{,}1 + x$ ainsi que la courbe représentative de $g$ sur l'intervalle $[\, 25 \,;\, 26\, ]$ dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, l'unité étant 5 centimètres.

**2. Cas général**

Nous reprenons ici les notations de la partie B.

Soit $x_0$ un nombre réel supérieur ou égal à $\alpha$.

En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, démontrer que, pour tout $x$ de l'intervalle $[x_0 ; x_0+1]$, on a : $f(x_0)+A(x-x_0) \leq f(x) \leq f(x_0)+A(x-x_0)+10^{-n}$.

En déduire l'existence d'une droite $\Delta$ dépendant de $x_0$, dont on donnera l'équation, telle que, pour tout $x$ de l'intervalle $[\, x_0 \,;\, x_0+1 \,]$, la distance entre les points d'abscisse $x$ sur la courbe $\mathcal{C}$ et sur la droite $\Delta$ soit majorée par $10^{-n}$.

En conclusion, pour tout $x_0$ nombre réel positif suffisamment grand, la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle $[\, x_0 \,;\, x_0+1 \,]$ est très proche d'une droite dépendant de $x_0$.

## D. Résultat sur la droite (OM), M étant un point de $\mathcal{C}$.

1. Exemple

Soit $g$ la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $g(x)=x+\sqrt{x}$.

Démontrer que si $x \geq 100$ alors $1 \leq \dfrac{g(x)}{x} \leq 1{,}1$.

Démontrer que si $x \geq 10000$ alors $1 \leq \dfrac{g(x)}{x} \leq 1{,}01$.

En déduire que, M étant un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse supérieure à 10 000, la droite (OM) est « coincée » entre les droites d’équations $y=x$ et $y=1{,}01x$.

2. Cas général

On utilise de nouveau les notations de la partie B.

En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[\, \alpha \,;\, +\infty \,[$, démontrer que, pour tout réel $x$ de cet intervalle, on a $f(\alpha)+A(x-\alpha) \leq f(x) \leq f(\alpha)+(A+10^{-n})(x-\alpha)$.

En déduire que, pour tout réel $x$ de cet intervalle, on a $f(\alpha)-A\alpha \leq f(x)-Ax \leq f(\alpha)+10^{-n}x$, puis que $\dfrac{f(\alpha)}{x}-\dfrac{A\alpha}{x} \leq \dfrac{f(x)}{x}-A \leq \dfrac{f(\alpha)}{x}+10^{-n}$.

Soit $x \in [\, \alpha \,;\, +\infty \,[$ et suffisamment grand pour que : $\dfrac{f(\alpha)}{x}-\dfrac{A\alpha}{x} \geq -2\times10^{-n}$ et pour que $\dfrac{f(\alpha)}{x} \leq 10^{-n}$.

En déduire qu'alors on a: $-2\times10^{-n} \leq \dfrac{f(x)}{x}-A \leq 2\times10^{-n}$.

En conclusion, si D désigne la droite d'équation $y=Ax$ et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x$, le raisonnement ci-dessus montre que, si $x$ est suffisamment grand, le coefficient directeur de la droite (OM) est très proche de celui de D ; en fait, l'angle entre la droite (OM) et D devient aussi proche de l’angle nul qu'on le désire.