# ÉTUDE DE MONOTONIE

| | |
|---|---|
| ***Objectif*** | *Étudier le sens de variation d'une fonction avec ou sans la dérivée.* |
| ***Outils*** | *Théorèmes sur les fonctions monotones (somme, produit, composée, parité).*<br>*Théorème sur le sens de variation à partir du signe de la dérivée.* |

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle, on peut aussi utiliser les résultats sur :

- les inégalités ;
- la composée de deux fonctions monotones ;
- la somme de deux fonctions de même monotonie ;
- le produit de deux fonctions positives de même monotonie ;
- les variations d'une fonction paire ou impaire sur tout son ensemble de définition D à partir de la monotonie de cette fonction sur $D \cap [\, 0 \,;+\infty\, [$ ;
- le signe de la dérivée quand elle existe.

Quel est, dans chaque cas, la méthode la plus appropriée ?

## Exercice 1

Choisir la méthode qui semble la plus appropriée pour établir le sens de variation de la fonction $f$ définie sur $]-1\,;0\,]$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}}{1+x^3}$.

## Exercice 2

Même question pour la fonction $g$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}}$

## Exercice 3

On suppose connue la fonction partie entière, notée : $x \mapsto \mathrm{E}(x)$. Cette fonction est croissante sur $\mathbf{R}$.

En déduire le sens de variation sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de $h_1 : x \mapsto \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et, sur $[\,0\,;+\infty\,[$, de $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{E}(x)^2+1}$

On esquissera la courbe représentative de $h_1$ sur $]\,0\,;2\,[$, et celle de $h_2$ sur $[\,0\,;5\,[$.

## Exercice 4

Soit la fonction $f$ de la variable réelle définie par $f(x) = \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2+4}$.

Après avoir justifié l'écriture suivante de $f(x)$ : $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2+4}}$, on étudiera le sens de variation de $f$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par les deux méthodes :

- étude du signe de la dérivée
- utilisation des résultats cités en introduction.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie par $r(x) = \sqrt{1-x^4}$ .

1. $r$ n'est pas dérivable en $1$.
   a. Démontrer, grâce à l'étude du signe de la dérivée, que $r$ est décroissante sur $[\,0\,;1\,[$.
   b. Établir le sens de variation de $r$ sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Établir le sens de variation de $r$ sur $[\,0\,;1\,]$ sans utiliser la dérivée.
3. Comparer les deux méthodes.
4. En utilisant la parité de $r$, déduire les variations de $r$ sur l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$.