

## ***VI – Suites***

<b>VARIATION : DE LA SUITE À LA FONCTION</b> -----	<b>2</b>
<b>VARIATION : DE LA FONCTION À LA SUITE</b> -----	<b>4</b>
<b>LA PARABOLE CARRÉE</b> -----	<b>6</b>
<b>ÉVOLUTION DE LA NOTION DE LIMITE D'UNE SUITE</b> -----	<b>10</b>
<b>ÉQUATION <math>F(X) = X</math></b> -----	<b>14</b>
<b>AU CŒUR DE LA TOILE</b> -----	<b>16</b>
<b>L'ÉCONOMIE DU SCUBIDOU</b> -----	<b>20</b>
<b>C'EST AU DÉBUT QUE TOUT SE JOUE</b> -----	<b>23</b>

## VARIATION : DE LA SUITE À LA FONCTION

### Objectif

Proposer des contre-exemples montrant que les réciproques des théorèmes permettant de déduire le sens de variation d'une suite  $u_n = f(n)$  à partir du sens de variation de  $f$  sont fausses.

### Outils

Suites



On a déjà justifié les trois théorèmes suivants :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}^+$ .

(1) si  $f$  est constante sur  $\mathbf{R}^+$  alors la suite  $u$ , définie sur  $\mathbf{N}$  par  $u_n = f(n)$ , est constante.

(2) si  $f$  est croissante sur  $\mathbf{R}^+$  alors la suite  $u$ , définie sur  $\mathbf{N}$  par  $u_n = f(n)$ , est croissante ;

(3) si  $f$  est décroissante sur  $\mathbf{R}^+$  alors la suite  $u$ , définie sur  $\mathbf{N}$  par  $u_n = f(n)$ , est décroissante ;

L'objectif de cette activité est de réfléchir sur la véracité des réciproques de ces théorèmes.



### A. Contre-exemple à la réciproque du théorème 1

1. Soit la suite  $(u_n)$ , définie, sur  $\mathbf{N}$ , par  $u_n = \sin(\pi n)$ .

Calculer  $u_n$ . Que peut-on en conclure ?

2. En utilisant le théorème dit « de la variation de la composée », étudier sur  $[0 ; 2]$  les variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

Prouver que  $f$  est périodique.

3. La réciproque du théorème (1) est-elle vraie ?

### B. Contre-exemples à la réciproque des théorèmes 2 et 3

#### Exemple 1

1. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ , définie, sur  $\mathbf{N}$ , par  $u_n = n - 2n^2$ .

2. Étudier sur  $[0 ; +\infty[$  les variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x - 2x^2$ .

3. La réciproque du théorème (3) est-elle vraie ?

### Exemple 2

On propose maintenant un contre-exemple plus « fort » pour lequel la suite  $(u_n)$  est strictement monotone, bien que la fonction associée ne soit monotone sur aucun intervalle de la forme  $[a; +\infty[$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

1. Soit la suite  $(u_n)$ , définie, sur  $\mathbf{N}$ , par  $u_n = n \cos(2\pi n)$ .

Écrire plus simplement  $u_n$ . Quelle est le sens de variation de cette suite ?

2.  $f$  est la fonction définie, pour tout réel positif  $x$ , par :  $f(x) = x \cos(2\pi x)$ .

Tracer la courbe représentative de  $f$  sur la calculatrice.

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Calculer  $f(n)$ ,  $f\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ,  $f(n+1)$ .

En déduire que  $f$  n'est monotone sur aucun des intervalles de la forme  $[a; +\infty[$

## VARIATION : DE LA FONCTION À LA SUITE

<b>Objectif</b>	Étudier l'influence du sens de variation de $f$ sur celui de la suite $u$ définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ .
<b>Outils</b>	Raisonnement par récurrence.



$f$  étant une fonction monotone sur un intervalle  $I$ , quel est le sens de variation de la suite  $u$  définie par son premier terme et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  ?



### A. Un exemple avec une fonction croissante

- Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie sur  $[-12 ; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{12+x}$ .  
Pour  $x \in [-12 ; 13]$ , tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal bien choisi.
- Dans la suite de cet exercice on note  $a$  un réel donné de l'intervalle  $[-12 ; +\infty[$  et on note  $u$  la suite définie sur  $\mathbf{N}$  par  $u_0 = a$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - On suppose  $u_0 < u_1$ . Montrer, grâce à un raisonnement par récurrence, que  $u$  est croissante.
  - Montrer que, dans tous les cas, la suite  $u$  est monotone.
  - Donner alors le sens de variation de la suite  $u$  dans chacun des cas suivants :  
 $a = -3$  ;       $a = 4$  ;       $a = 13$  .  
En utilisant la droite d'équation  $y = x$ , construire, sur la figure, les trois premiers termes de chacune des trois suites.
- Résoudre dans  $[-12 ; +\infty[$  l'équation :  $\sqrt{12+x} = x$ .  
Résoudre dans  $[-12 ; +\infty[$  l'inéquation :  $\sqrt{12+x} > x$ .
  - Pour quelles valeurs de  $a$  la suite  $u$  est-elle croissante ? décroissante ? stationnaire ?

## B. Un exemple avec une fonction décroissante

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty ; 12 ]$  par  $f(x) = \sqrt{12-x}$ .

Pour  $x \in [-13 ; 12]$ , tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

2. Démontrer que, pour tout  $x$  de  $[-13 ; 12]$ ,  $f(x)$  est élément de  $[-13 ; 12]$ .

Pour tout réel  $a$  de l'intervalle  $[-13 ; 12]$ , on peut définir une suite  $u$  grâce aux deux relations suivantes : «  $u_0 = a$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  ».

Prouver que  $u_2 - u_1$  a le signe contraire de celui de  $u_1 - u_0$ .

Conclure sur la monotonie de la suite  $u$ .

3. Construire, sur la figure, les trois premiers termes de la suite  $(u_n)$  dans chacun des cas suivants :

$$a = -13 ; \quad a = 3 ; \quad a = 8 .$$

4. Pour quelles valeurs de  $a$  la suite  $(u_n)$  est-elle monotone ?

## C. Généralisations

On considère un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et  $f$  une fonction à valeurs réelles, définie sur  $I$  et possédant la propriété suivante : « pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $f(x)$  appartient à  $I$  » (on dit alors que  $I$  est stable par  $f$ ).

Soit  $a$  un élément de  $I$ . On note  $u$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. On suppose que  $f$  est croissante sur  $I$ . Démontrer que la suite  $u$  est monotone

2. On suppose cette fois que  $f$  est décroissante sur  $I$ .

a. La suite  $u$  peut-elle être monotone ?

b. Démontrer que  $f \circ f$  est croissante sur  $I$ .

c. Soit la suite  $v$  définie sur  $\mathbf{N}$  par : « pour tout entier naturel  $p$ ,  $v_p = u_{2p}$  ».

Étudier la monotonie de  $v$ .

d. Soit la suite  $w$  définie sur  $\mathbf{N}$  par « pour tout entier naturel  $p$ ,  $w_p = u_{2p+1}$  ».

Étudier la monotonie de  $w$ .

# LA PARABOLE CARRÉE

<b>Objectif</b>	Étudier une méthode de calcul de l'aire d'un secteur de parabole, due à Archimède
<b>Notions utilisées</b>	Suites géométriques ; limites des suites géométriques.



Archimède, l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité, vécut de 287 à 212 environ avant Jésus-Christ, à Syracuse, en Sicile. Il mourut sous l'épée d'un soldat lors de la prise de la ville par les Romains, alors que le général ennemi avait donné l'ordre de l'épargner.

Archimède appartenait à la civilisation grecque postérieure à Alexandre le Grand (–356 à –323), dont le centre scientifique était le Musée d'Alexandrie, sorte d'institut de recherche où travaillèrent entre autres les célèbres Euclide (–315 à –255) et Ératosthène (–275 à –195), ce dernier ayant été l'ami et le correspondant d'Archimède.

Archimède, outre ses découvertes mathématiques, est connu, entre autres, pour ses travaux en mécanique sur les leviers et les centres de gravité, et pour la découverte de la « poussée d'Archimède », qui provoqua, d'après la légende, sa fameuse exclamation « Eurêka » (« J'ai trouvé ! »).

Il démontra de nombreux résultats nouveaux en géométrie. Il développa surtout de nouvelles méthodes pour l'approximation des longueurs, des volumes et des aires qui ont préparé le concept de limite, et qui ont donc fait d'Archimède l'un des fondateurs de l'Analyse.

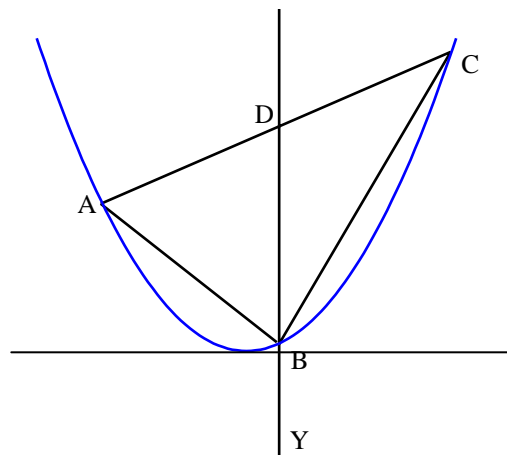
On s'intéresse ici à un théorème fameux d'Archimède : la quadrature de la parabole. Les résultats énoncés par Archimède peuvent être en effet démontrés de façon rapide et intéressante en utilisant nos concepts actuels de suite géométrique et de limite.

Nous suivons ici l'exposé fait dans l'ouvrage « Mathématiques et Mathématiciens », par Dedron et Itard, édition Magnard, 1960, pages 97 et 98. On y trouvera des compléments.



Archimède énonce ainsi son théorème :

« Étant donné un segment  $ABC$  d'une section rectangulaire de cône, si par le milieu  $D$  de la corde on mène le diamètre  $DY$  qui coupe l'arc en  $B$  et qu'on joigne  $BA$ ,  $BC$ , le segment  $ABC$  vaut les  $\frac{4}{3}$  du triangle  $ABC$ . »



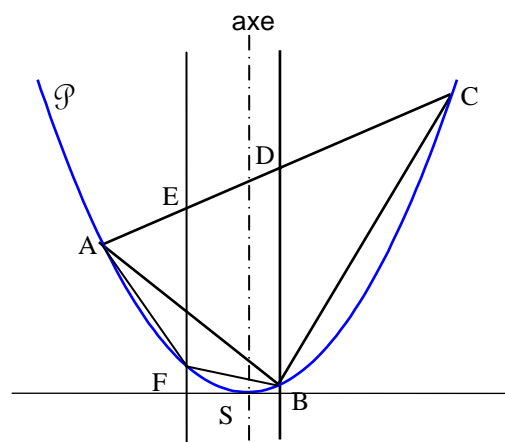
## Question 1

Le vocabulaire mathématique grec était fort différent du nôtre, bien qu'il ne soit pas difficile à comprendre. Grâce au petit « dictionnaire » ci-dessous, traduire en termes modernes le théorème qu'énonce Archimède.

section rectangle de cône	parabole
diamètre de cette section de cône	axe de cette parabole, ou droite parallèle à cet axe.
corde de la section	segment $[AB]$ , A et B étant deux points de la parabole.
segment ABC de la section de cône	A, B et C étant trois points de la parabole, avec B entre A et C, surface comprise entre le segment $[AC]$ et la parabole. Nous dirions « secteur de la parabole ». Archimède désigne aussi ainsi l'aire de cette surface.

Archimède construit d'abord le point E, milieu de  $[AD]$ , la parallèle à l'axe menée par E, et le point d'intersection F de cette droite avec la parabole. Il démontre que dans une telle configuration, l'aire du triangle AFB est égale au huitième de celle du triangle ABC. (Résultat 1)

Les Grecs excellaient dans l'étude des coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole), et obtenaient aisément de tels résultats. Nous proposons une méthode moderne utilisant les outils modernes : coordonnées et déterminant.



## Question 2. Démonstration moderne du résultat 1

S étant le sommet de la parabole  $\mathcal{P}$ , on se place dans un repère orthonormal direct  $(S; \vec{i}; \vec{j})$ ,  $\vec{j}$  étant un vecteur directeur de l'axe de la parabole de norme 1. Une équation de  $\mathcal{P}$  dans ce repère est alors de la forme  $y = kx^2$  ( $k \in \mathbf{R}^{**}$ ). En suivant la démarche d'Archimède, on considère deux points quelconques A et C de  $\mathcal{P}$ , puis les points B et F définis comme ci-dessus. On note respectivement  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $f$ , les abscisses des points A, B, C et F dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On admet que l'aire d'un triangle MNP du plan, en unités d'aire, est égale à la moitié de la valeur absolue du déterminant des deux vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{NP}$ .

a. Démontrer que l'aire  $T$  du triangle ABC inscrit dans  $\mathcal{P}$  est égale à  $\frac{1}{2}|k(a-b)(b-c)(c-a)|$  unités d'aire.

b. Vérifier que  $(b-a) = \frac{1}{2}(c-a)$ ,  $(f-a) = \frac{1}{2}(b-a)$ ,  $(b-f) = \frac{1}{2}(c-b)$ .

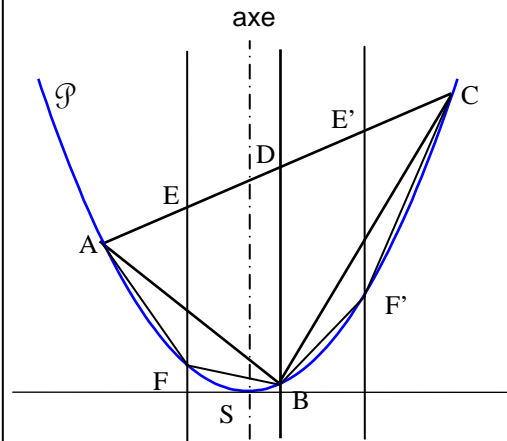
En déduire que l'aire du triangle AFB est égale au huitième de celle du triangle ABC (résultat 1).

Puis Archimède construit  $E'$ , milieu de  $[DC]$ , la parallèle à l'axe menée par  $E'$ , et le point d'intersection  $F'$  de cette droite avec la parabole. D'après le résultat ci-dessus, en échangeant les rôles des points  $A$  et  $C$ , l'aire du triangle  $CF'B$  est égale aussi au huitième de celle du triangle  $ABC$ .

On en déduit que la somme des aires des triangles  $AFB$  et  $BF'C$ , aire notée  $T_1$ , est égale à  $\frac{1}{4}T$ .

Archimède répète cette construction, et obtient quatre nouveaux triangles  $AGF$ ,  $FHB$ ,  $BIF'$ ,  $F'JC$ , dont la somme des aires sera notée  $T_2$ .

En poursuivant ainsi, il obtient des triangles de plus en plus petits. Notons  $T_n$  la somme des aires des petits triangles construits à la  $n$ -ième étape.



### Question 3

- Placer sur la figure les points  $G, H, I$  et  $J$ .
- Démontrer que  $T_2 = \frac{1}{4}T_1$ .
- Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, exprimer  $T_{n+1}$  en fonction de  $T_n$ .
- Exprimer  $T_n$ , en fonction de  $T$ .

Puis Archimède considère la somme  $S_n$  des aires des triangles de toutes tailles construits comme ci-dessus, jusqu'au rang  $n$ .

Archimède admet que lorsqu'on poursuit indéfiniment la construction de triangles de plus en plus petits,  $S_n$  approche d'aussi près qu'on le souhaite l'aire  $A$  du secteur de parabole délimité par  $\mathcal{P}$  et  $[AC]$ .

### Question 4

- Exprimer  $S_n$  en fonction de  $T$  et de  $n$ .
- En déduire la limite de  $S_n$ . En déduire la valeur de  $A$ .

Cependant les Grecs de l'Antiquité ne disposaient pas de notre concept de limite. Archimède ne procède donc pas comme nous venons de le faire, mais par double impossibilité. Il démontre que  $A = \frac{4}{3}T$  par le raisonnement suivant :

Il remarque d'abord que :  $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$  (Résultat 2)

En multipliant par  $T$ , on en déduit :  $S_n + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T = T + \left(\frac{1}{4}\right)T + \left(\frac{1}{4}\right)^2 T + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n T + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T = \frac{4}{3}T$

En particulier, ceci montre que  $S_n$  est strictement inférieur à  $\frac{4}{3}T$ .

Supposons que  $A$  soit strictement supérieur à  $\frac{4}{3}T$ . Posons :  $A = \frac{4}{3}T + d$ , avec  $d > 0$ .



Pour  $n$  assez grand, l'écart entre  $S_n$  et  $A$  est strictement inférieur à  $d$ , donc :  $A - S_n < d$ , d'où  $A < S_n + d$ .  
 Mais  $S_n + d$  est lui-même strictement inférieur à  $\frac{4}{3}T + d$ . On obtient donc :  $A < \frac{4}{3}T + d$ , ce qui est absurde.

Supposons maintenant que  $A$  soit strictement inférieur à  $\frac{4}{3}T$  ; posons  $A = \frac{4}{3}T - d$ , avec  $d > 0$ .

Alors  $A + d = \frac{4}{3}T$ . Considérons un rang  $n$  tel que l'aire des triangles ajoutés à la  $n$ -ième étape,

$\left(\frac{1}{4}\right)^n T$ , soit strictement inférieure à  $d$ . Comme  $S_n$  est strictement inférieure à  $A$ , on a

$S_n + d < A$ , soit  $\left(\frac{4}{3}\right)T - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T + d < \frac{4}{3}T$ .

On en déduit  $d < \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T$ , alors que  $d$  est supposé supérieur à  $\left(\frac{1}{4}\right)^n T$ , on aboutit donc là aussi à une absurdité.

A n'étant ni strictement supérieur, ni strictement inférieur à  $\frac{4}{3}T$ , on a  $A = \frac{4}{3}T$ .

L'aire recherchée est donc égale à  $\frac{4}{3}$  de celle du triangle ABC, ce qu'il fallait démontrer.

### Question 5

Démontrer le résultat 2.

#### REMARQUE

En fait, c'est par un procédé mélangeant mécanique et géométrie qu'Archimède découvrit la valeur de l'aire du secteur de parabole, telle que la précise le théorème ci-dessus.

Il imagina que cette parabole faisait contrepoids à une certaine masse de part et d'autre d'un point fixe, comme dans une balance. Grâce à des calculs très ingénieux, il trouva la valeur de la masse qui faisait équilibre à la parabole, et en déduisit la « masse » de la parabole elle-même, qu'il supposait proportionnelle à son aire. On retrouve dans cette démarche le spécialiste des leviers et des centres de gravité.

Cependant il n'était pas entièrement satisfait de cette première démonstration, qu'il trouvait insuffisamment rigoureuse. C'est pourquoi il présenta deux autres démonstrations de son théorème, dont celle qui est présentée ci-dessus.

On trouvera la première démonstration d'Archimède, par équilibre, telle qu'il l'expose dans une lettre à Ératosthène découverte en 1906, dans l'ouvrage cité de Dedron et Itard, "Mathématiques et Mathématiciens", pages 93 à 97.

# ÉVOLUTION DE LA NOTION DE LIMITE D'UNE SUITE

## Objectif

Découvrir la formation laborieuse du concept de limite de suite à travers l'histoire, jusqu'à la définition en  $\varepsilon$  et  $N_0$ . Faire sentir l'ancienneté du concept et de la problématique, et la valeur de la formalisation rigoureuse finale.

## Notions utilisées

D'abord uniquement les limites de suites géométriques et de suites de sommes associées. Mais on arrive progressivement à la définition de la limite de suite en  $\varepsilon$  et  $N_0$ .



Depuis l'Antiquité, la notion de limite joue un rôle majeur en mathématiques. Mais ce n'est que récemment, au XIX<sup>e</sup> siècle, que les mathématiciens parvinrent à en donner une définition précise et rigoureuse. De Zénon d'Élée à Karl Weierstrass, cette séquence retrace succinctement le cheminement de la notion.

Bibliographie : Une histoire des mathématiques - A. Dahan-Dalmedico & Peiffer, Points-Sciences – Seuil - Chap. « La limite : de l'impensé au concept »



## A. Zénon d'Élée

On peut faire commencer l'histoire du concept de limite avec Zénon d'Élée, qui vécut autour de 450 avant Jésus-Christ et fut un disciple de Parménide. Il est surtout connu pour ses paradoxes qui prétendent démontrer l'impossibilité du mouvement.

Le premier de ces paradoxes est celui de la **dichotomie**, ou partage en deux : « Un mobile partant de A pour aller en B doit d'abord arriver en  $M_1$ , milieu de  $[AB]$ . Puis il doit arriver en  $M_2$ , milieu de  $[M_1B]$ , puis en  $M_3$ , milieu de  $[M_2B]$ , et ainsi de suite, à l'infini... Devant parcourir cette infinité d'étapes, le mobile n'arrivera jamais au but. »

La clé de ce paradoxe est que ces déplacements, en nombre infini, seront cependant parcourus en un temps fini.

### Exercice A1

On suppose que le segment  $[AB]$  mesure deux mètres et que la vitesse du mobile est de 1 m/s.

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $t_n$  le temps nécessaire pour aller de A à  $M_n$ .

Calculer  $t_1$  et  $t_2$ . Exprimer  $t_n$  en fonction de  $n$ .

Calculer la limite de  $t_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Le second paradoxe de Zénon d'Élée est celui d'**Achille et de la tortue** : « Le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide, car celui qui poursuit doit toujours commencer par atteindre le point d'où est parti le fuyard, de sorte que le plus lent a toujours quelque avance. »

C'est le même problème que celui de la dichotomie et sa solution est identique.

### Exercice A2

On suppose qu'Achille court à la vitesse de 10 m/s, que la tortue a une vitesse de 5 cm/s et que la distance initiale les séparant est de 100 m. On note  $P_0$  la position initiale d'Achille et  $P_1$  la position initiale de la tortue,  $P_2$  la position de la tortue lorsqu'Achille atteint  $P_1$ ,  $P_3$  la position de la tortue lorsqu'Achille atteint  $P_2$  et ainsi de suite.

1. Calculer les distances  $P_1P_2$  et  $P_2P_3$ . Démontrer que la suite des distances  $P_nP_{n+1}$ , pour  $n$  entier naturel, est une suite géométrique.
2. Exprimer en fonction de  $n$  la distance  $P_0P_n$ .
3. On note  $t_n$  le temps que met Achille pour parcourir la distance  $P_0P_n$ . Exprimer  $t_n$  en fonction de  $n$ , puis démontrer que la suite  $(t_n)$  admet une limite finie.
4. Déterminer de façon plus simple le moment où Achille rattrape la tortue (on pourra considérer la vitesse relative d'Achille par rapport à la tortue).

### B. Euclide

Les suites géométriques sont sous-jacentes dans les paradoxes cités de Zénon. La limite de telles suites intervient aussi dans la proposition 1 du livre X d'Euclide<sup>1</sup> (Euclide vécut à Alexandrie aux alentours de 300 avant Jésus-Christ) :

« Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. »

### Exercice B

On entreprend ici la démonstration de cette proposition.

On appelle  $A$  et  $\varepsilon$  les grandeurs évoquées dans cette proposition,  $A$  étant la plus grande, de sorte que  $0 < \varepsilon < A$ . On pose  $u_0 = A$  et, pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  la « *grandeur restante* » après  $n$  soustractions dont parle Euclide (le terme « grandeur » désigne un réel strictement positif).

- a. À chaque étape « *on retranche du reste une grandeur plus grande que sa moitié* ». Traduire cette hypothèse en une inégalité entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose cette condition vérifiée .

- b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times A$  et en déduire la limite de  $u_n$ .
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $n \leq 2^n$ , et en déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq \left(\frac{1}{n}\right) \times A$ .
- d. Valider alors l'affirmation d'Euclide : « *si l'on fait toujours la même chose, il restera [à partir d'une certaine étape  $N$  à déterminer] une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées [c'est-à-dire  $\varepsilon$ ]* ».

En fait, la conclusion d'Euclide coïncide exactement avec la définition actuelle du fait que la limite de la suite positive  $(u_n)$  est égale à zéro.

<sup>1</sup> Cité par exemple dans Dedron & Itard, mathématiques et mathématiciens, page 79

## C. Intuition et manque de rigueur : xvii<sup>e</sup> et xviii<sup>e</sup> siècles

L'Analyse fit d'énormes progrès au cours des xvii<sup>e</sup> et xviii<sup>e</sup> siècles. Les mathématiciens de cette époque avaient une intuition claire de la notion de limite.

On trouve l'idée par exemple chez Leibniz, dans le premier article qu'il publia, en février 1682<sup>2</sup>. L'objet de cet article est de donner le nombre  $\pi$  comme la somme suivante :

$$\pi = 4 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \text{ etc.} \right]. \text{ Et Leibniz d'écrire :}$$

*« L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre [...] que toute grandeur donnée. »*

### Exercice C

On considère les suites  $u$  et  $v$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $u_n = \frac{(-1)^n \times 4}{2n+1}$  et  $v_n = \sum_{i=0}^n u_i$ .

a. Calculer les six premiers termes de la suite  $v$ .

Émettre une conjecture sur les positions relatives de  $v_n$  et de  $\pi$  suivant l'entier naturel  $n$ .

*Dans les questions qui suivent, on admettra que cette conjecture est vraie.*

b. Pour tout entier naturel  $n$ , comparer alors  $|v_n - \pi|$  à  $|v_n - v_{n-1}|$  et vérifier que ce dernier réel est égal à  $\frac{4}{2n+1}$ . En déduire la limite de la suite  $v$ .

c. Leibniz écrit que « à mesure qu'on considère la suite de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée ». On note  $\varepsilon$  cette « grandeur donnée » ( $\varepsilon$  est donc un réel strictement positif). Trouver, en fonction de  $\varepsilon$ , un entier naturel  $N$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur à  $N$ , on soit certain que l'erreur commise, c'est-à-dire  $|v_n - \pi|$ , soit inférieure à  $\varepsilon$ .

On retrouve de nouveau ici, avec une formulation proche de celle d'Euclide, la définition moderne du fait que la limite de la suite  $(u_n)$  est égale à  $\pi$ .

d. Programmer le calcul de  $v_n$  et donner les valeurs de  $v_{100}$  et  $v_{101}$ .

Cependant, les mathématiciens de l'époque n'essayèrent pas de définir précisément le concept de limite. Ils se fiaient à leur intuition et menaient souvent des raisonnements peu rigoureux, qui parfois les induisaient en erreur. Mais, parmi tous les nouveaux résultats valables et intéressants découverts à cette époque, les erreurs commises pouvaient apparaître comme des incidents sans importance.

<sup>2</sup> Leibniz, « Naissance du Calcul Différentiel », traduit et présenté par Marc Parmentier, chez Vrin.

## D. Le progrès par la recherche de la rigueur : Cauchy<sup>3</sup>, Weierstrass<sup>4</sup>

À mesure toutefois que s'étendaient les recherches et les découvertes en Analyse au cours de XIX<sup>e</sup> siècle, la nécessité de définir clairement les concepts et les termes mis en œuvre se fit sentir.

Cette mise en ordre commence avec Louis-Augustin Cauchy (1789-1857), qui fait de la limite une des notions centrales de l'Analyse. Il en donne la définition suivante dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* :

*« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres. »*

Cependant c'est à l'allemand Karl Weierstrass (1815-1897) que l'on doit le langage très précis, plus mathématique, qui seul permet de raisonner correctement.

Voici la définition moderne du fait qu'une suite admet une limite finie  $l$  :

On dit qu'une suite  $(u_n)$  de nombres réels admet pour limite le réel  $l$  si, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , aussi petit que l'on veut, il est possible de déterminer un entier naturel  $N$ , tel qu'au-delà du rang  $N$ , tous les termes de la suite  $u$  sont éloignés de  $l$  d'une distance inférieure ou égale à  $\varepsilon$ .

Soit encore :  $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^{+,*}, \exists N \in \mathbf{N} / n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

### Exercice D

En utilisant cette définition, démontrer les résultats suivants :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n + \sin n} = 2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 7n + 13} = 1$$

<sup>3</sup> Mathématicien français (1789 - 1857). Ses travaux se rapportent aux branches les plus diverses des mathématiques, mais on lui doit surtout une rénovation de l'analyse par l'emploi de méthodes rigoureuses.

<sup>4</sup> Mathématicien allemand (1815 - 1897). Chef de file d'une brillante école d'analystes.

# ÉQUATION $f(x) = x$

## Objectif

Donner des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution de l'équation  $f(x) = x$  puis, dans certains cas, trouver une suite donnant des valeurs approchées d'une telle solution.

## Outils

Analyse de terminale S.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Suites



On se propose de prouver l'existence de solutions de l'équation  $f(x) = x$  pour certains types de fonctions  $f$ , puis, pour une fonction vérifiant certaines hypothèses, d'approcher l'unique solution de cette équation à l'aide d'une suite du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ .



## A. Conditions suffisantes d'existence d'une solution

**Premier cas :  $f$  est une fonction continue et décroissante sur  $\mathbf{R}$ .**

- $f$  étant une fonction continue et décroissante sur  $\mathbf{R}$ , montrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x) - x$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbf{R}$ .
- Comparer  $g(x)$  avec  $f(0) - x$  dans le cas où  $x$  est positif.  
En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .  
À l'aide d'un raisonnement semblable, déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$ .
- En déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$ .
- Exemple.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{1 - 2e^x}{1 + 2e^x}$ .

- En utilisant le résultat établi ci-dessus, démontrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .
- Démontrer que  $\alpha$  vérifie cette autre équation :  $\alpha = -\ln 2 + \ln(1 - \alpha) - \ln(1 + \alpha)$ .

(Au cours de cette démonstration on établira que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $] -1 ; 1 [$ .)

**Deuxième cas :  $f$  est une fonction continue sur  $[a ; b]$  et  $[a ; b]$  est stable par  $f$ .**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$ . On suppose que l'intervalle  $[a ; b]$  est stable par  $f$  c'est-à-dire que, pour tout  $x$  appartenant à  $[a ; b]$ ,  $f(x)$  appartient à  $[a ; b]$ .

- Démontrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x) - x$  s'annule au moins une fois sur  $[a ; b]$ .  
En déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $[a ; b]$ .

Remarquons que, si  $f$  est définie et continue sur un intervalle  $I$  stable par  $f$ , mais si  $I$  n'est plus supposé fermé, l'existence d'une solution de l'équation  $f(x) = x$  n'est plus assurée. C'est ce que montre l'exemple suivant.

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ .

Démontrer que  $f$  est continue sur  $]1; 2[$ , que  $]1; 2[$  est stable par  $f$ , et que, pourtant, l'équation  $f(x) = x$  n'admet pas de solution appartenant à  $]1; 2[$ .

## B. Approximation de la solution de $f(x) = x$ à l'aide d'une suite

On considère un intervalle  $[a; b]$ , un réel  $k$  appartenant à  $]0; 1[$  et une fonction  $f$  vérifiant :

- $f$  est dérivable sur  $[a; b]$ .
- $[a; b]$  est stable par  $f$ .
- pour tout réel  $x$  de  $[a; b]$ ,  $|f'(x)| \leq k$ .

1. À l'aide des résultats de la partie A, démontrer l'existence d'un réel  $\alpha$  solution de l'équation  $f(x) = x$ .
2. On suppose que cette équation admet des solutions  $\alpha$  et  $\beta$ .  
À l'aide de l'inégalité des accroissements finis démontrer que  $|\alpha - \beta| \leq k |\alpha - \beta|$ , puis que  $\alpha = \beta$ .
3. Soit  $r$  un réel de l'intervalle  $[a; b]$ . On définit une suite  $u$  d'éléments de  $[a; b]$  en posant  $u_0 = r$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - a. Démontrer que, pour tout entier  $n$ , on a :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$ .
  - b. En déduire que, pour tout entier  $n$ , on a :  $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$  et que la suite  $u$  est convergente.
4. Exemple.

On se propose de trouver une valeur approchée, à  $10^{-3}$  près, de la solution de l'équation  $\cos x = x$ .

- a. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer, sur  $[-\pi; \pi]$ , la courbe d'équation  $y = \cos x$  et la droite d'équation  $y = x$ .

On constate graphiquement, et on admettra, que l'équation  $\cos x = x$  possède une solution et une seule,  $\alpha$ , et que  $\alpha \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$

- b. Montrer que la fonction définie par  $f(x) = \cos x$  sur  $\left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$  vérifie les hypothèses de cette partie et que l'on peut prendre  $k = 0,85$ .

- c. Soit  $u$  la suite de premier terme  $u_0 = 0,5$  et telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que  $|u_{n_0} - \alpha| < 10^{-3}$  ?

Programmer sur la calculatrice le calcul des termes de la suite  $u$ .

En déduire une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

## AU CŒUR DE LA TOILE

### Objectif

Traduire, à l'aide d'une suite, un processus géométrique itératif et rendre compte de son évolution.

Mettre en place les premiers principes d'étude d'une suite itérée : exploitation de la fonction numérique sous-jacente, majoration par une suite géométrique.

### Notions utilisées

Suites géométriques ; limites des suites géométriques ; variations d'une fonction numérique.



Deux problèmes tout à fait comparables de convergence de suites de nombres rationnels où il s'agit de formaliser le problème, d'étudier la suite et de reconstituer les étapes de la démarche.

Cette activité est extraite de la brochure « Espace modules – Première S »  
publiée par le CRDP d'Aquitaine (1996 – ISBN 2-86617-322-8).



### Problème 1. Format radical

On se propose d'approcher  $\sqrt{2}$  à l'aide d'une suite de nombres rationnels définis par l'algorithme géométrique décrit ci-contre.

Partant du rectangle  $OA_0B_0C_0$  (noté  $R_0$ ) tel que  $OA_0 = 1$  et  $OC_0 = 2$ , on construit « extérieurement » le carré  $B_0C_0A_1I_1$ , puis le carré  $A_0I_1B_1C_1$  pour obtenir le rectangle  $OA_1B_1C_1$  (noté  $R_1$ ).

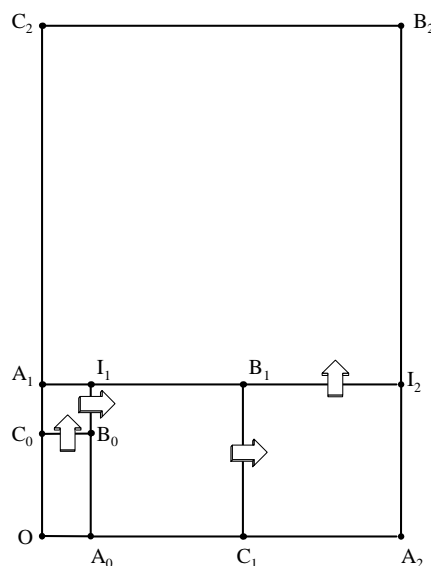
De même, à partir du rectangle  $OA_1B_1C_1$ , on construit « extérieurement » le carré  $B_1C_1A_2I_2$ , puis le carré  $A_1I_2B_2C_2$ , pour obtenir le rectangle  $OA_2B_2C_2$  (noté  $R_2$ ).

Et ainsi de suite...

Pour tout entier naturel  $n$ , on note respectivement  $L_n$  et  $l_n$  la longueur et la largeur du rectangle  $R_n$ .

On appelle format de  $R_n$ , et on note  $q_n$ ,

le quotient  $\frac{L_n}{l_n}$ .



#### A. Relation de récurrence

- Calculer les six premiers formats et en donner une valeur approchée à  $10^{-4}$  près. Classifier ces nombres dans l'ordre croissant et les comparer à  $\sqrt{2}$ .
- Exprimer les dimensions du rectangle  $R_{n+1}$  en fonction des dimensions du rectangle  $R_n$ . En déduire le format  $q_{n+1}$  de  $R_{n+1}$  en fonction du format  $q_n$  de  $R_n$ .



## B. Comportement de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 2]$  par  $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ , sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. a. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; 2]$  et tracer la courbe  $\mathcal{C}$  (unité graphique : 9 cm).

Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ , on a :  $1 \leq f(x) \leq 2$ .

- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $1 \leq q_n \leq 2$ .

À l'aide de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\Delta$ , représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite.

2. a. Déterminer le point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\Delta$ .

Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ , distinct de  $\sqrt{2}$ , on a :

$$\frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} < 0.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\frac{q_{n+1} - \sqrt{2}}{q_n - \sqrt{2}} < 0$ .

Situer alors les différents termes de la suite par rapport à  $\sqrt{2}$ .

3. a. Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ , on a l'égalité :

$$f(x) - f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - x}{(1+x)(1+\sqrt{2})}.$$

Démontrer que  $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |x - \sqrt{2}|$ .

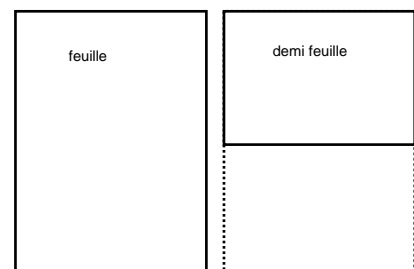
- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$|q_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |q_n - \sqrt{2}| ;$$

$$|q_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |q_0 - \sqrt{2}| ;$$

$$\text{et enfin } |q_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n .$$

4. Démontrer que la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{2}$ .



## C. Récréation 1. Découpage

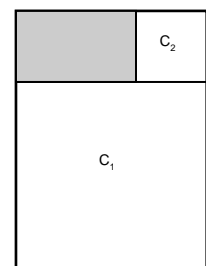
Dans l'imprimerie, les standards usuels du papier, désignés par A0, A1, A2, ..., ont été définis de telle sorte qu'une feuille et une demi feuille aient le même format.

Quel est ce format ?

Sachant que l'aire d'une feuille de papier A0 est de  $1\text{ m}^2$ , calculer ses dimensions.

Quelles sont les dimensions d'une feuille de papier de type A4 ?

Sur une feuille de papier de type A4, tracer les deux carrés  $C_1$  et  $C_2$  indiqués par le schéma.



Quel est le format du rectangle restant ?

## D. Récréation 2. Algorithme de Babylone

Début

Choisir un nombre positif quelconque  $x$ , de préférence « simple » et pas trop éloigné de  $\sqrt{2}$ .

Calculer le nombre  $y = \frac{2}{x}$

Tant que  $|x - y| > 10^{-5}$

Prendre pour nouvelle valeur de  $x$  le nombre  $\frac{x+y}{2}$

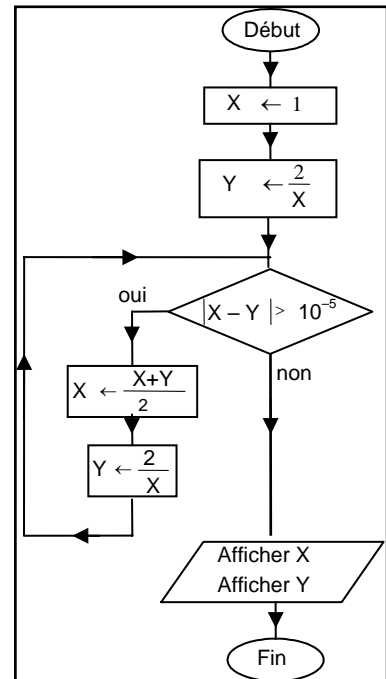
Prendre pour nouvelle valeur de  $y$  le nombre  $\frac{2}{x}$

Fin de boucle

Fin.

Table des valeurs exactes de  $x$  et  $y$  (à compléter) :

	init.	boucle 1	boucle 2	boucle 3	...
$x$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	...	...
$y$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{24}{17}$	...	...



Dresser la table correspondante des valeurs approchées à  $10^{-5}$  près.

Démontrer que  $\sqrt{2}$  est compris entre  $x$  et  $y$ .

Donner une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-5}$  près.

## Problème 2. À la poursuite du nombre d'or

On se propose d'approcher le « nombre d'or »,  $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ , que l'on notera  $\varphi$ , à l'aide d'une suite de nombres rationnels définis par l'algorithme géométrique décrit ci-contre.

Partant du rectangle  $OA_0B_0C_0$  (noté  $R_0$ ) tel que  $OA_0 = 1$  et

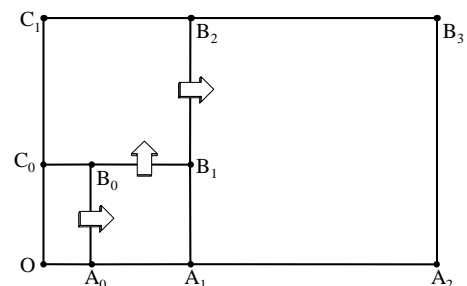
$OC_0 = 2$ , on construit « extérieurement » le carré  $A_0B_0B_1A_1$  pour obtenir le rectangle  $OA_1B_1C_0$  (noté  $R_1$ ).

De même, à partir du rectangle  $OA_1B_1C_0$ , on construit « extérieurement » le carré  $C_0B_1B_2C_1$  pour obtenir le rectangle  $OA_1B_2C_1$  (noté  $R_2$ ).

Et ainsi de suite...

Pour tout entier naturel  $n$ , on note respectivement  $L_n$  et  $l_n$  la longueur et la largeur du rectangle  $R_n$ .

On appelle format de  $R_n$ , et on note  $q_n$ , le quotient  $\frac{L_n}{l_n}$ .



### A. Relation de récurrence

1. Calculer les six premiers formats et en donner une valeur approchée à  $10^{-4}$  près.

Classer ces nombres dans l'ordre croissant et les comparer à  $\varphi$ .

2. Exprimer les dimensions du rectangle  $R_{n+1}$  en fonction des dimensions du rectangle  $R_n$ .

En déduire le format  $q_{n+1}$  de  $R_{n+1}$  en fonction du format  $q_n$  de  $R_n$ .



# L'ÉCONOMIE DU SCOUBIDOU

## Objectif

Étudier des suites définies par récurrence dans un contexte d'économie théorique.

## Notions utilisées

Axiome de récurrence. Suites. Inégalité des accroissements finis.



Les producteurs proposent un produit sur le marché. Le nombre de produits proposés est l'offre :  $Q$ . Les acheteurs demandent ce produit. Le nombre total de produits qu'ils souhaitent acheter est la demande :  $D$ .

Les producteurs ont en général intérêt à vendre en plus grande quantité un produit qui se vend cher :  $Q$  est souvent une fonction croissante du prix. Les acheteurs ont tendance à préférer un produit moins cher :  $D$  est en général une fonction décroissante du prix.

De la confrontation entre l'offre et la demande, peut naître une évolution des prix.

On dit que le prix d'un produit est un prix d'équilibre  $p_e$  lorsqu'il n'évolue pas au cours du temps.

On dit que ce prix d'équilibre est stable lorsque le prix, partant d'une valeur quelconque proche de  $p_e$  évolue au cours du temps en tendant vers  $p_e$ .

On se propose d'étudier ici l'existence d'un prix d'équilibre dans deux situations économiques.



Dans les deux cas suivants, les prix mensuels observés forment, à partir du premier mois, une suite  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ . De même, les demandes forment une suite  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$  et les offres une suite  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ . La différence  $D_n - Q_n$  représente la demande non satisfaite au cours du mois numéro  $n$ .

## A. Étude du marché du scoubidou ordinaire

On suppose que les producteurs déterminent chaque mois la quantité  $Q_{n+1}$  (en milliers d'unités) qu'ils produiront le mois suivant en fonction du prix  $p_n$  (en francs) qu'ils constatent ce mois-ci d'après la formule :  $Q_{n+1} = f(p_n) = p_n - 3$ .

Les consommateurs déterminent chaque mois leur demande (en milliers d'unités) en fonction du prix observé pendant le mois courant d'après la formule :  $D_n = g(p_n) = -1,5 p_n + 15$ .

Le prix mensuel  $p_n$  s'établit de sorte que la demande corresponde à l'offre :  $D_n = Q_n$ .

1. Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $D_{n+1}$ , puis de  $p_n$ .
2. Montrer l'existence d'un prix d'équilibre  $p_e$ .
3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $p_{n+1} - p_e = -\frac{2}{3}(p_n - p_e)$ .

En déduire que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $p_n - p_e = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} (p_1 - p_e)$ .

4. Montrer que le prix d'équilibre est stable, c'est-à-dire que la suite des prix  $(p_n)$  admet  $p_e$  pour limite.

### 5. Illustration graphique

- Représenter graphiquement les fonctions  $f$  et  $g$  dans un même repère. On appelle  $\Delta$  la représentation graphique de  $f$  et  $\Delta'$  celle de  $g$ .
- On suppose que  $p_1 = 4$ .  
En déduire graphiquement  $Q_2$  en utilisant  $\Delta$ .  
En se rappelant que  $D_2 = Q_2$ , et en utilisant  $\Delta'$ , en déduire  $p_2$ .  
À l'aide de  $p_2$  et en utilisant  $\Delta$ , déterminer  $Q_3$ .
- Itérer le procédé et vérifier que l'équilibre est stable, le prix se rapprochant du prix d'équilibre et oscillant autour de lui.

## B. Étude du marché du scoubidou en or

On imagine la situation économique théorique suivante :

La bijouterie Bartier fabrique pour sa clientèle aisée un scoubidou en or.

La demande de cette clientèle est d'autant plus grande que le prix est plus élevé (effet de snobisme).

Elle obéit à la formule :  $D_n = 4 - \frac{3}{p_n}$ .

Le prix  $p_n$  dépend de l'écart constaté le mois précédent entre l'offre et la demande suivant la formule :

$p_n = p_{n-1} + (D_{n-1} - Q_{n-1})$ . Il s'agit d'un effet de pénurie ( $D_{n-1} > Q_{n-1}$ ) ou de surproduction ( $Q_{n-1} > D_{n-1}$ ).

La production du mois courant s'ajuste à la demande du mois précédent suivant la formule :  $Q_n = D_{n-1}$ .

- Déduire de ces données que  $p_{n+1} = 4 - \frac{3}{p_n}$ .

En déduire qu'il existe deux prix d'équilibre : 1 et 3.

### 2. Exploration graphique

Soit  $\gamma$  la représentation graphique de  $f : \begin{cases} x \in ]0; +\infty[ \\ f(x) = 4 - \frac{3}{x} \end{cases}$  dans un repère orthonormé d'unité 2 cm et

① la droite d'équation  $y = x$ .

En faisant trois figures selon la position de  $p_1$  par rapport aux nombres 1 et 3, représenter sur l'axe des abscisses les nombres  $p_2, p_3, p_4$  dans chacun des cas.

Constater graphiquement que 3 est un prix d'équilibre stable et que 1 est instable.

### 3. Étude dans le cas où $p_1 = 2$

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $p_n \in [2; 3]$ .

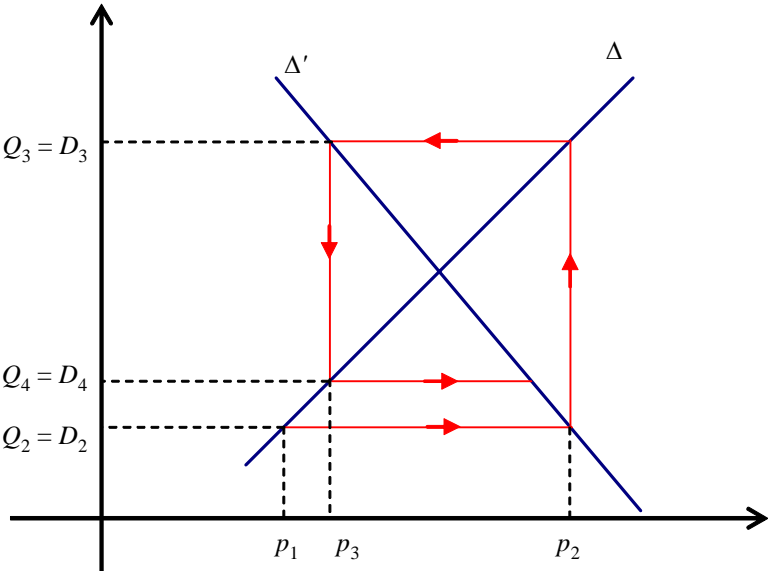
- Montrer que, si  $x \in [2; 3]$ , alors  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ .

- En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $|p_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4} |p_n - 3|$ .

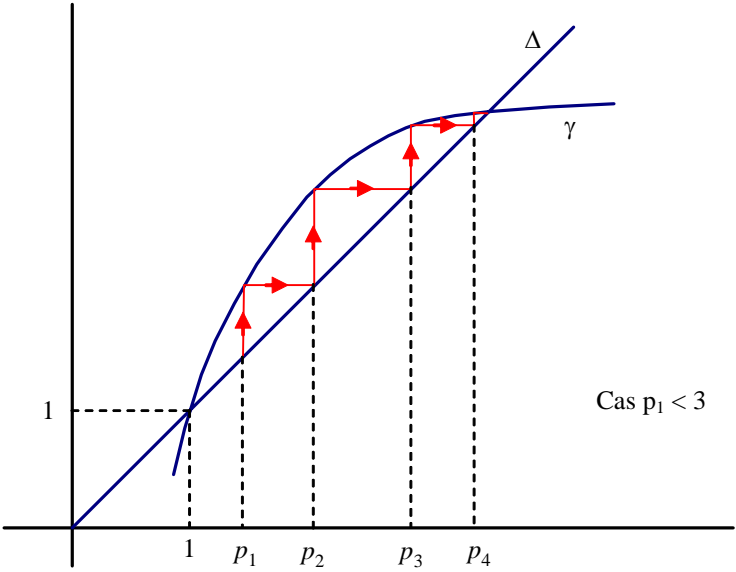
En déduire que  $|p_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ .

- Conclure.

Étude du marché du scoubidou ordinaire



Étude du marché du scoubidou en or



## C'EST AU DÉBUT QUE TOUT SE JOUE

<b>Objectif</b>	Étudier l'influence du premier terme d'une suite définie par récurrence sur le comportement de la suite (monotonie, convergence).
<b>Outils</b>	Raisonnement par récurrence. Théorème de convergence d'une suite croissante majorée. Équation vérifiée par la limite d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par :  $f(x) = (1-x)^2$ , et  $u$  une suite définie par son premier terme  $u_0$  et la relation de récurrence « pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  ».

On se propose d'étudier le comportement de la suite suivant la valeur de son premier terme.



### A. Étude de la fonction $f$ ; étude de suites particulières

- Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = f(2-x)$ .
  - Résoudre l'équation  $f(x) = x$  ainsi que l'inéquation  $f(x) \leq x$ .  
On note  $a$  et  $b$ , avec  $a < b$ , les deux solutions de l'équation  $f(x) = x$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  en y faisant figurer les valeurs  $1 ; a ; b ; 0 ; 2 ; 2-a ; 2-b$ .
- Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unités : 2 cm) et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .
  - Interpréter graphiquement les résultats établis aux questions 1.a. et 1.b.
- Étudier la suite  $u$  dans chacun des cas :  $u_0 = a$ ,  $u_0 = b$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_0 = 1$ ,  $u_0 = 2$ ,  $u_0 = 2-a$ ,  $u_0 = 2-b$ .

### B. Étude de la suite $u$ dans le cas $u_0 > b$

On suppose  $u_0 > b$ .

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > b$ .
  - Démontrer que la suite  $u$  est croissante.
- Démontrer que, pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $f(y) - f(x) = (y-x)(x+y-2)$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - b \geq 2(u_n - b)$ .
  - Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n - b \geq 2^n(u_0 - b)$
  - En déduire que  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

### C. Étude de la suite $u$ dans le cas où $u_0 \in ]0 ; a [$

On suppose  $u_0 \in ]0 ; a [$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $p$ ,  $u_{2p} \in ]0 ; a [$ .
  - Démontrer que, pour tout entier naturel  $p$ ,  $u_{2p+1} \in ]a ; 1 [$ .
- Établir que, pour tout réel  $x$ ,  $f \circ f(x) - x = x(x-1)(x-a)(x-b)$
  - Soit  $v$  et  $w$  les suites définies, pour tout entier naturel  $p$ , respectivement par  $v_p = u_{2p}$  et  $w_p = u_{2p+1}$ . Déduire des résultats précédents que la suite  $v$  est décroissante et que la suite  $w$  est croissante.
  - La suite  $v$  est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. De même la suite  $w$  est croissante et majorée par  $a$ , donc elle converge. Déterminer les limites de  $v$  et  $w$ .
  - La suite  $u$  est-elle monotone ? est-elle convergente ?

### D. Étude de la suite $u$ dans le cas $u_0 \in ]a ; 2 [$

On suppose  $u_0 \in ]a ; 2 [$ . Démontrer que :

- si  $u_0 \in ]a ; 1 [$  alors  $u_1 \in ]0 ; a [$  ;
- si  $u_0 \in ]1 ; 2 - a [$  alors  $u_1 \in ]0 ; a [$  ;
- si  $u_0 \in ]2 - a ; 2 [$  alors  $u_2 \in ]0 ; a [$ .

Donc, mis à part un ou deux termes, les termes de la suite  $u$  sont identiques à ceux d'une suite définie par la même relation de récurrence et dont le premier terme appartient à  $]0 ; a [$ . Il y a seulement un décalage d'indice entre les termes des deux suites. Le cas traité au D. se ramène au cas traité au C.

### E. Étude de la suite $u$ dans le cas $u_0 \in ]2 ; b [$

On suppose  $u_0 \in ]2 ; b [$ .

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n < b$ .
- On suppose que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in ]2 ; b [$ . On rappelle que, pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $f(y) - f(x) = (y-x)(x+y-2)$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $b - u_n \geq 2(b - u_n)$  puis que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $b - u_n \geq 2^n(b - u_0)$ .  
Démontrer que l'on aboutit à une contradiction.

Il existe donc un entier naturel  $N$  tel que  $u_N$  appartienne à  $]0 ; 2 [$ .

Il s'ensuit qu'à partir du rang  $N$ , les termes de la suite  $u$  sont ceux d'une suite définie par la même relation de récurrence et de premier terme  $u_N$  élément de  $]0 ; 2 [$ .

Les suites de cette espèce ont été étudiées dans les parties C. et D.