C'EST AU DÉBUT QUE TOUT SE JOUE

Objectif	*Étudier l'influence du premier terme d'une suite définie par récurrence sur le comportement de la suite (monotonie, convergence).*
Outils	*Raisonnement par récurrence.* *Théorème de convergence d'une suite croissante majorée.* *Équation vérifiée par la limite d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$*

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = (1 - x)^2$, et u une suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence « pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

On se propose d'étudier le comportement de la suite suivant la valeur de son premier terme.

A. Étude de la fonction f ; étude de suites particulières

1. a. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = f(2 - x)$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ ainsi que l'inéquation $f(x) \leq x$.

   On note a et b, avec $a < b$, les deux solutions de l'équation $f(x) = x$.

2. Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les valeurs 1 ; a ; b ; 0 ; 2 ; $2–a$; $2–b$).

3. a. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unités : 2 cm) et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

   b. Interpréter graphiquement les résultats établis aux questions 1.a. et 1.b.

4. Étudier la suite u dans chacun des cas : $u_0 = a$, $u_0 = b$, $u_0 = 0$, $u_0 = 1$, $u_0 = 2$, $u_0 = 2 - a$, $u_0 = 2 - b$.

B. Étude de la suite u dans le cas $u_0 > b$

On suppose $u_0 > b$.

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > b$.

   b. Démontrer que la suite u est croissante.

2. a. Démontrer que, pour tous réels x et y, $f(y) - f(x) = (y - x)(x + y - 2)$.

   En déduire que , pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - b \geq 2\ (u_n - b)$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n - b \geq 2^n\ (u_0 - b)$

   c. En déduire que u diverge vers $+\infty$.

C. Étude de la suite u dans le cas où $u_0 \in]\,0\,;a\,[$

On suppose $u_0 \in]\,0\,;a\,[$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel p, $u_{2p} \in]\,0\,;a\,[$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel p, $u_{2p+1} \in]\,a\,;1\,[$.

2. a. Établir que, pour tout réel x, $f \circ f(x) - x = x\,(x-1)\,(x-a)\,(x-b)$

   b. Soit v et w les suites définies, pour tout entier naturel p, respectivement par $v_p = u_{2p}$ et $w_p = u_{2p+1}$ Déduire des résultats précédents que la suite v est décroissante et que la suite w est croissante.

   c. La suite v est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. De même la suite w est croissante et majorée par a, donc elle converge. Déterminer les limites de v et w.

   d. La suite u est-elle monotone ? est-elle convergente ?

D. Étude de la suite u dans le cas $u_0 \in]\,a\,;2\,[$

On suppose $u_0 \in]\,a\,;2\,[$. Démontrer que :

– si $u_0 \in]\,a\,;1\,[$ alors $u_1 \in]\,0\,;a\,[$;

– si $u_0 \in]\,1\,;2-a\,[$ alors $u_1 \in]\,0\,;a\,[$;

– si $u_0 \in]\,2-a\,;2\,[$ alors $u_2 \in]\,0\,;a\,[$.

> Donc, mis à part un ou deux termes, les termes de la suite u sont identiques à ceux d'une suite définie par la même relation de récurrence et dont le premier terme appartient à $]\,0\,;a\,[$. Il y a seulement un décalage d'indice entre les termes des deux suites. Le cas traité au D. se ramène au cas traité au C.

E. Étude de la suite u dans le cas $u_0 \in]\,2\,;b\,[$

On suppose $u_0 \in]\,2\,;b\,[$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < b$.

2. On suppose que, pour tout entier naturel n , $u_n \in [\,2\,;b\,[$. On rappelle que, pour tous réels x et y, $f(y) - f(x) = (y-x)(x+y-2)$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n , $b - u_n \geq 2\,(\,b - u_n\,)$ puis que, pour tout entier naturel n , $b - u_n \geq 2^n\,(\,b - u_0\,)$.

   Démontrer que l'on aboutit à une contradiction.

> Il existe donc un entier naturel N tel que u_N appartienne à $[\,0\,;2\,[$.
> Il s'ensuit qu'à partir du rang N, les termes de la suite u sont ceux d'une suite définie par la même relation de récurrence et de premier terme u_N élément de $[\,0\,;2\,[$.
> Les suites de cette espèce ont été étudiées dans les parties C. et D.