LA PARABOLE CARRÉE

Objectif	*Étudier une méthode de calcul de l'aire d'un secteur de parabole, due à Archimède*
Notions utilisées	*Suites géométriques ; limites des suites géométriques.*

Archimède, l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité, vécut de 287 à 212 environ avant Jésus-Christ, à Syracuse, en Sicile. Il mourut sous l'épée d'un soldat lors de la prise de la ville par les Romains, alors que le général ennemi avait donné l'ordre de l'épargner.

Archimède appartenait à la civilisation grecque postérieure à Alexandre le Grand (–356 à –323), dont le centre scientifique était le Musée d'Alexandrie, sorte d'institut de recherche où travaillèrent entre autres les célèbres Euclide (–315 à –255) et Ératosthène (–275 à –195), ce dernier ayant été l'ami et le correspondant d'Archimède.

Archimède, outre ses découvertes mathématiques, est connu, entre autres, pour ses travaux en mécanique sur les leviers et les centres de gravité, et pour la découverte de la « poussée d'Archimède », qui provoqua, d'après la légende, sa fameuse exclamation « Eurêka » (« J'ai trouvé ! »).

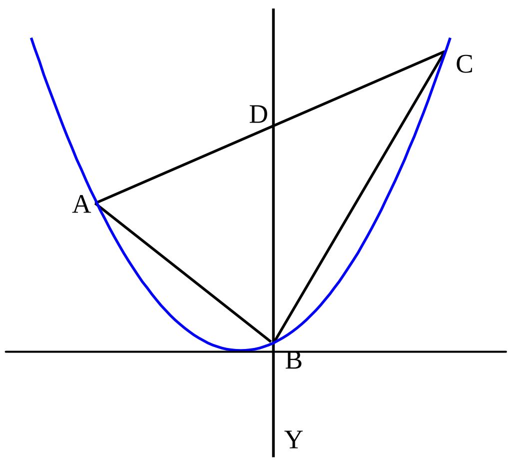
Il démontra de nombreux résultats nouveaux en géométrie. Il développa surtout de nouvelles méthodes pour l'approximation des longueurs, des volumes et des aires qui ont préparé le concept de limite, et qui ont donc fait d'Archimède l'un des fondateurs de l'Analyse.

On s'intéresse ici à un théorème fameux d'Archimède : la quadrature de la parabole. Les résultats énoncés par Archimède peuvent être en effet démontrés de façon rapide et intéressante en utilisant nos concepts actuels de suite géométrique et de limite.

Nous suivons ici l'exposé fait dans l'ouvrage « Mathématiques et Mathématiciens », par Dedron et Itard, édition Magnard, 1960, pages 97 et 98. On y on trouvera des compléments.

Archimède énonce ainsi son théorème :

« Étant donné un segment ABC d'une section rectangle de cône, si par le milieu D de la corde on mène le diamètre DY qui coupe l'arc en B et qu'on joigne BA, BC, le segment ABC vaut les 4/3 du triangle ABC. »



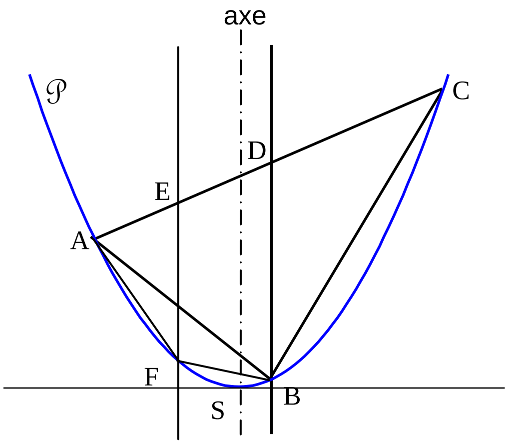
Question 1

Le vocabulaire mathématique grec était fort différent du nôtre, bien qu'il ne soit pas difficile à comprendre. Grâce au petit « dictionnaire » ci-dessous, traduire en termes modernes le théorème qu'énonce Archimède.

section rectangle de cône	parabole
diamètre de cette section de cône	axe de cette parabole, ou droite parallèle à cet axe.
corde de la section	segment [AB], A et B étant deux points de la parabole.
segment ABC de la section de cône	A, B et C étant trois points de la parabole, avec B entre A et C, surface comprise entre le segment [AC] et la parabole. Nous dirions « secteur de la parabole ». Archimède désigne aussi ainsi l'aire de cette surface.

Archimède construit d'abord le point E, milieu de [AD], la parallèle à l'axe menée par E, et le point d'intersection F de cette droite avec la parabole. Il démontre que dans une telle configuration, l'aire du triangle AFB est égale au huitième de celle du triangle ABC. (Résultat 1)

Les Grecs excellaient dans l'étude des coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole), et obtenaient aisément de tels résultats. Nous proposons une méthode moderne utilisant les outils modernes : coordonnées et déterminant.



Question 2. Démonstration moderne du résultat 1

S étant le sommet de la parabole $\mathcal{P}$, on se place dans un repère orthonormal direct $(S; \vec{i}; \vec{j})$, $\vec{j}$ étant un vecteur directeur de l'axe de la parabole de norme 1. Une équation de $\mathcal{P}$ dans ce repère est alors de la forme $y = k\,x^2$ ($k \in \mathbf{R}^{+*}$). En suivant la démarche d'Archimède, on considère deux points quelconques A et C de $\mathcal{P}$, puis les points B et F définis comme ci-dessus. On note respectivement a, b, c et f, les abscisses des points A, B, C et F dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On admet que l'aire d'un triangle MNP du plan, en unités d'aire, est égale à la moitié de la valeur absolue du déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$.

a. Démontrer que l'aire T du triangle ABC inscrit dans $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{1}{2}\left|k(a-b)(b-c)(c-a)\right|$ unités d'aire.

b. Vérifier que $(b-a) = \frac{1}{2}(c-a)$, $(f-a) = \frac{1}{2}(b-a)$, $(b-f) = \frac{1}{2}(c-b)$.

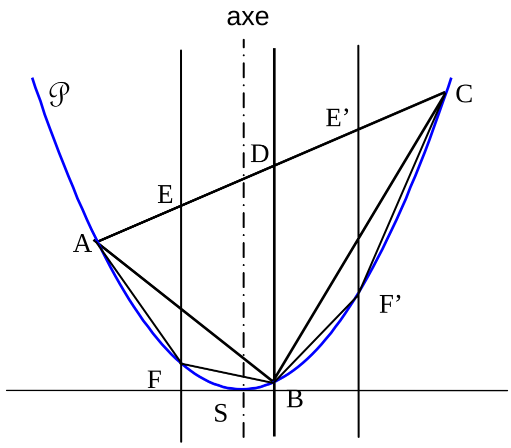
En déduire que l'aire du triangle AFB est égale au huitième de celle du triangle ABC (résultat 1).

Puis Archimède construit E', milieu de [DC], la parallèle à l'axe menée par E', et le point d'intersection F' de cette droite avec la parabole. D'après le résultat ci-dessus, en échangeant les rôles des points A et C, l'aire du triangle CF'B est égale aussi au huitième de celle du triangle ABC.

On en déduit que la somme des aires des triangles AFB et BF'C, aire notée T_1, est égale à $\frac{1}{4}T$.

Archimède répète cette construction, et obtient quatre nouveaux triangles AGF, FHB, BIF', F'JC, dont la somme des aires sera notée T_2.

En poursuivant ainsi, il obtient des triangles de plus en plus petits. Notons T_n la somme des aires des petits triangles construits à la n-ième étape.



Question 3

a. Placer sur la figure les points G, H, I et J.

b. Démontrer que $T_2 = \frac{1}{4}T_1$.

c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

d. Exprimer T_n, en fonction de T.

Puis Archimède considère la somme S_n des aires des triangles de toutes tailles construits comme ci-dessus, jusqu'au rang n.

Archimède admet que lorsqu'on poursuit indéfiniment la construction de triangles de plus en plus petits, S_n approche d'aussi près qu'on le souhaite l'aire A du secteur de parabole délimité par $\mathcal{P}$ et [AC].

Question 4

a. Exprimer S_n en fonction de T et de n.

b. En déduire la limite de S_n. En déduire la valeur de A.

Cependant les Grecs de l'Antiquité ne disposaient pas de notre concept de limite. Archimède ne procède donc pas comme nous venons de le faire, mais par double impossibilité. Il démontre que $A = \frac{4}{3}T$ par le raisonnement suivant :

Il remarque d'abord que : $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$ (Résultat 2)

En multipliant par T, on en déduit : $S_n + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T = T + \left(\frac{1}{4}\right)T + \left(\frac{1}{4}\right)^2 T + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n T + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T = \frac{4}{3}T$

En particulier, ceci montre que S_n est strictement inférieur à $\frac{4}{3}T$.

Supposons que A soit strictement supérieur à $\frac{4}{3}T$. Posons : $A = \frac{4}{3}T + d$, avec $d > 0$.

Pour n assez grand, l'écart entre S_n et A est strictement inférieur à d, donc : $A - S_n < d$, d'où $A < S_n + d$. Mais $S_n + d$ est lui-même strictement inférieur à $\frac{4}{3}T + d$. On obtient donc : $A < A + d$, ce qui est absurde.

Supposons maintenant que A soit strictement inférieur à $\frac{4}{3}T$; posons $A = \frac{4}{3}T - d$, avec $d > 0$.

Alors $A + d = \frac{4}{3}T$. Considérons un rang n tel que l'aire des triangles ajoutés à la n-ième étape, $\left(\frac{1}{4}\right)^n T$, soit strictement inférieure à d. Comme S_n est strictement inférieure à A, on a $S_n + d < A$, soit $\left(\frac{4}{3}\right)T - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T + d < \frac{4}{3}T$.

On en déduit $d < \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n T$, alors que d est supposé supérieur à $\left(\frac{1}{4}\right)^n T$, on aboutit donc là aussi à une absurdité.

A n'étant ni strictement supérieur, ni strictement inférieur à $\frac{4}{3}T$, on a $A = \frac{4}{3}T$.

L'aire recherchée est donc égale à $\frac{4}{3}$ de celle du triangle ABC, ce qu'il fallait démontrer.

Question 5

Démontrer le résultat 2.

> REMARQUE
> En fait, c'est par un procédé mélangeant mécanique et géométrie qu'Archimède découvrit la valeur de l'aire du secteur de parabole, telle que la précise le théorème ci-dessus.
>
> Il imagina que cette parabole faisait contrepoids à une certaine masse de part et d'autre d'un point fixe, comme dans une balance. Grâce à des calculs très ingénieux, il trouva la valeur de la masse qui faisait équilibre à la parabole, et en déduisit la « masse » de la parabole elle-même, qu'il supposait proportionnelle à son aire. On retrouve dans cette démarche le spécialiste des leviers et des centres de gravité.
>
> Cependant il n'était pas entièrement satisfait de cette première démonstration, qu'il trouvait insuffisamment rigoureuse. C'est pourquoi il présenta deux autres démonstrations de son théorème, dont celle qui est présentée ci-dessus.
>
> On trouvera la première démonstration d'Archimède, par équilibre, telle qu'il l'expose dans une lettre à Ératosthène découverte en 1906, dans l'ouvrage cité de Dedron et Itard, "Mathématiques et Mathématiciens", pages 93 à 97.