L'ÉCONOMIE DU SCOUBIDOU

Objectif	*Étudier des suites définies par récurrence dans un contexte d'économie théorique.*
Notions utilisées	*Axiome de récurrence. Suites. Inégalité des accroissements finis.*

Les producteurs proposent un produit sur le marché. Le nombre de produits proposés est l'offre : Q. .Les acheteurs demandent ce produit. Le nombre total de produits qu'ils souhaitent acheter est la demande : D.

Les producteurs ont en général intérêt à vendre en plus grande quantité un produit qui se vend cher : Q est souvent une fonction croissante du prix. Les acheteurs ont tendance à préférer un produit moins cher : D est en général une fonction décroissante du prix.

De la confrontation entre l'offre et la demande, peut naître une évolution des prix.

On dit que le prix d'un produit est un prix d'équilibre p_e lorsqu'il n'évolue pas au cours du temps.

On dit que ce prix d'équilibre est stable lorsque le prix, partant d'une valeur quelconque proche de p_e évolue au cours du temps en tendant vers p_e.

On se propose d'étudier ici l'existence d'un prix d'équilibre dans deux situations économiques.

Dans les deux cas suivants, les prix mensuels observés forment, à partir du premier mois, une suite $p_1, p_2, \dots p_n \dots$ De même, les demandes forment une suite $D_1, D_2,, \dots , D_n , \dots$ et les offres une suite $Q_1, Q_2, \dots , Q_n , \dots$. La différence $D_n - Q_n$ représente la demande non satisfaite au cours du mois numéro n.

A. Étude du marché du scoubidou ordinaire

On suppose que les producteurs déterminent chaque mois la quantité Q_{n+1} (en milliers d'unités) qu'ils produiront le mois suivant en fonction du prix p_n (en francs) qu'ils constatent ce mois-ci d'après la formule : $Q_{n+1} = f(p_n) = p_n - 3$.

Les consommateurs déterminent chaque mois leur demande (en milliers d'unités) en fonction du prix observé pendant le mois courant d'après la formule : $D_n = g(p_n) = -1{,}5\, p_n + 15$.

Le prix mensuel p_n s'établit de sorte que la demande corresponde à l'offre : $D_n = Q_n$.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de D_{n+1}, puis de p_n.

2. Montrer l'existence d'un prix d'équilibre p_e.

3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $p_{n+1} - p_e = -\dfrac{2}{3}(p_n - p_e)$.

   En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a $p_n - p_e = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(p_1 - p_e)$.

4. Montrer que le prix d'équilibre est stable, c'est-à-dire que la suite des prix (p_n) admet p_e pour limite.

5. *Illustration graphique*
   a. Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un même repère. On appelle Δ la représentation graphique de f et Δ' celle de g.
   b. On suppose que $p_1 = 4$.

      En déduire graphiquement Q_2 en utilisant Δ.

      En se rappelant que $D_2 = Q_2$, et en utilisant Δ', en déduire p_2.

      À l'aide de p_2 et en utilisant Δ, déterminer Q_3.
   c. Itérer le procédé et vérifier que l'équilibre est stable, le prix se rapprochant du prix d'équilibre et oscillant autour de lui.

B. Étude du marché du scoubidou en or

On imagine la situation économique théorique suivante :

La bijouterie Bartier fabrique pour sa clientèle aisée un scoubidou en or.

La demande de cette clientèle est d'autant plus grande que le prix est plus élevé (effet de snobisme).

Elle obéit à la formule : $D_n = 4 - \dfrac{3}{p_n}$.

Le prix p_n dépend de l'écart constaté le mois précédent entre l'offre et la demande suivant la formule : $p_n = p_{n-1} + \left(D_{n-1} - Q_{n-1}\right)$. Il s'agit d'un effet de pénurie $\left(D_{n-1} > Q_{n-1}\right)$ ou de surproduction $\left(Q_{n-1} > D_{n-1}\right)$.

La production du mois courant s'ajuste à la demande du mois précédent suivant la formule : $Q_n = D_{n-1}$.

1. Déduire de ces données que $p_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{p_n}$.

   En déduire qu'il existe deux prix d'équilibre : 1 et 3.

2. *Exploration graphique*

   Soit γ la représentation graphique de $f : \begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ f(x) = 4 - \dfrac{3}{x} \end{cases}$ dans un repère orthonormé d'unité $2\ \mathrm{cm}$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.

   En faisant trois figures selon la position de p_1 par rapport aux nombres 1 et 3, représenter sur l'axe des abscisses les nombres p_2, p_3, p_4 dans chacun des cas.

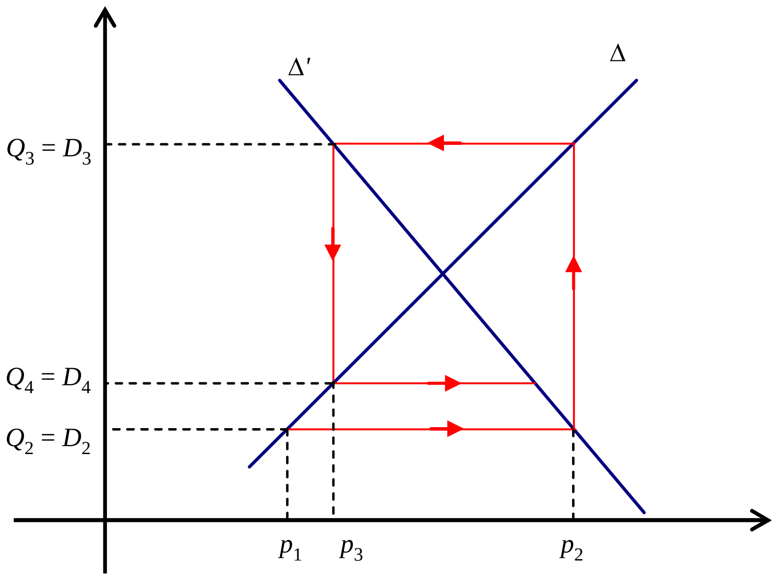
   Constater graphiquement que 3 est un prix d'équilibre stable et que 1 est instable.

3. Étude dans le cas où $p_1 = 2$
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a $p_n \in [\,2 ; 3\,]$.
   b. Montrer que, si $x \in [\,2 ; 3\,]$, alors $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.
   c. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $|p_{n+1} - 3| \leq \dfrac{3}{4}|p_n - 3|$.

      En déduire que $|p_n - 3| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$.
   d. Conclure.

DOCUMENT PROFESSEUR

Étude du marché du scoubidou ordinaire



Étude du marché du scoubidou en or