VARIATION : DE LA FONCTION À LA SUITE

Objectif	*Étudier l'influence du sens de variation de f sur celui de la suite u définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.*
Outils	*Raisonnement par récurrence.*

f étant une fonction monotone sur un intervalle I, quel est le sens de variation de la suite u définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$?

A. Un exemple avec une fonction croissante

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[\,-12\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \sqrt{12 + x}$.

   Pour $x \in [\,-12\,;13\,]$, tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal bien choisi.

2. Dans la suite de cet exercice on note a un réel donné de l'intervalle $[\,-12\,;+\infty\,[$ et on note u la suite définie sur **N** par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. On suppose $u_0 < u_1$. Montrer, grâce à un raisonnement par récurrence, que u est croissante.

   b. Montrer que, dans tous les cas, la suite u est monotone.

   c. Donner alors le sens de variation de la suite u dans chacun des cas suivants :

   $a = -3$; $a = 4$; $a = 13$.

   En utilisant la droite d'équation $y = x$, construire, sur la figure, les trois premiers termes de chacune des trois suites.

3. a. Résoudre dans $[\,-12\,;+\infty\,[$ l'équation : $\sqrt{12 + x} = x$.
   Résoudre dans $[\,-12\,;+\infty\,[$ l'inéquation : $\sqrt{12 + x} > x$.

   b. Pour quelles valeurs de a la suite u est-elle croissante ? décroissante ? stationnaire ?

B. Un exemple avec une fonction décroissante

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 12\,]$ par $f(x)=\sqrt{12-x}$.

   Pour $x \in [\,-13\ ;\ 12\,]$, tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

2. Démontrer que, pour tout x de $[\,-13\ ;\ 12\,]$, $f(x)$ est élément de $[\,-13\ ;\ 12\,]$.

   Pour tout réel a de l'intervalle $[\,-13\ ;\ 12\,]$, on peut définir une suite u grâce aux deux relations suivantes : « $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

   Prouver que $u_2 - u_1$ a le signe contraire de celui de $u_1 - u_0$.

   Conclure sur la monotonie de la suite u.

3. Construire, sur la figure, les trois premiers termes de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

   $a = -13$; $a = 3$; $a = 8$.

4. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est-elle monotone ?

C. Généralisations

On considère un intervalle I de **R** et f une fonction à valeurs réelles, définie sur I et possédant la propriété suivante : « pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à I » (on dit alors que I est stable par f).

Soit a un élément de I. On note u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. On suppose que f est croissante sur I. Démontrer que la suite u est monotone

2. On suppose cette fois que f est décroissante sur I.
   a. La suite u peut-elle être monotone ?
   b. Démontrer que $f \circ f$ est croissante sur I.
   c. Soit la suite v définie sur **N** par : « pour tout entier naturel p, $v_p = u_{2p}$ ».

      Étudier la monotonie de v.
   d. Soit la suite w définie sur **N** par « pour tout entier naturel p, $w_p = u_{2p+1}$.

      Étudier la monotonie de w.