EXPOSITION EN SÉRIE

Objectif	*Obtenir e^a comme limite d'une suite.*
Notions utilisées	*Intégration par parties. Obtention de la limite par encadrements. Raisonnement par récurrence.*

Obtenir e^a comme limite d'une suite.

D'après un problème de bac 1978

Dans tout le problème a est un nombre réel donné strictement positif.

1. Par une intégration par parties montrer que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)\,e^t\,dt$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\,dt$.

   Démontrer que $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + I_n$.

4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$.

   b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

   Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on a $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

   En déduire que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq u_N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$.

   c. En déduire les limites de u_n et de I_n quand n tend vers $+\infty$ et montrer que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$$