UN CALCUL D'INTÉGRALE CHEZ PASCAL

Objectif	*Lire et comprendre un texte historique, l'adapter en langage moderne, redémontrer certains de ses résultats.* *S'initier aux sommes de Riemann.*
Notions utilisées	*Définition de l'intégrale. Interprétation en terme d'aire.*

Il a fallu attendre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1715) pour qu'apparaisse le signe d'intégration $\int$, ainsi que la notation *dx*. C'est à ce même mathématicien, concurremment avec Isaac Newton (1642-1727), que l'on doit aussi des conceptions et des méthodes simples et claires dans le domaine de l'intégration. Cependant, bien avant eux, depuis Archimède (282-212 avant Jésus-Christ), des mathématiciens pratiquaient des calculs que nous appellerions *intégrations*, qui prenaient la forme de calculs d'aires, de volumes ou de longueurs, ou de déterminations de centres de gravité.

Leibniz trouva sa source d'inspiration dans l'œuvre de son illustre prédécesseur Blaise Pascal (1623-1662). Celui-ci, grand philosophe et grand écrivain, est aussi l'auteur d'une œuvre mathématique de première importance. Ses lettres regroupées sous le titre « *la Roulette et autres traités connexes* » sont considérées comme le premier traité de calcul intégral. Mais Pascal n'utilise bien sûr ni le mot, ni le signe d'*intégrale* ; il ne parle que de *sommations*.

Dans le texte présenté ci-après, Blaise Pascal calcule une « somme de sinus », c'est-à-dire, avec notre vocabulaire, l'intégrale de la fonction sinus sur un intervalle.

Il s'agit d'étudier ce texte, de traduire certaines expressions en langage moderne et de comprendre la démarche de Pascal.

La partie A présente le texte original de Pascal.

Les parties B et C adaptent le raisonnement de Pascal dans le langage actuel.

La partie D, enfin, donne une traduction moderne de l'énoncé de la proposition 1 de Pascal.

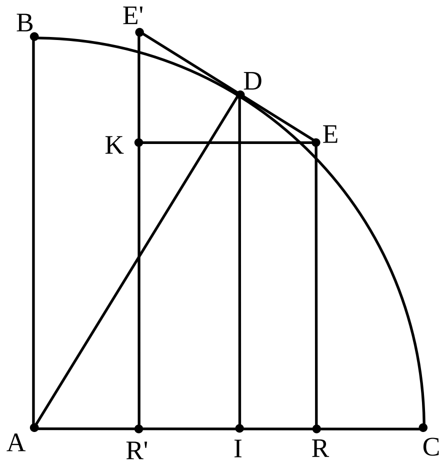
A. Texte historique

Traité des sinus du quart de cercle

Soit ABC un quart de cercle, dont le rayon AB soit considéré comme axe, et le rayon perpendiculaire AC comme base ; soit D un point quelconque dans l'arc, duquel soit mené le sinus DI[1] *sur le rayon AC ; et la touchante DE*[2]*, dans laquelle soient pris les points E où l'on voudra, d'où soient menés les perpendiculaires ER sur le rayon AC ;*

Je dis que le rectangle compris du sinus DI et de la touchante EE'[3] *est égal au rectangle compris de la portion de base (enfermée entre les parallèles) et du rayon AB*[4].

Car le rayon AD est au sinus DI comme EE' à RR' ou à EK : ce qui paraît clairement à cause des triangles rectangles et semblables DIA, EKE', l'angle EE'K ou EDI étant égal à l'angle DAI .



Proposition I[5]

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes[6]*, multipliée par le rayon.*

1 Ce que Pascal nomme « *le sinus DI* » n'est autre que le segment [DI]. La longueur de ce segment n'est d'ailleurs pas égale au sinus de l'angle IAD, mais à AB. sin(IAD) ; le mot « *sinus* » avait au XVII^e siècle un sens légèrement différent du nôtre

2 La « *touchante DE* » est la tangente au quart de cercle en D.

3 La « *touchante EE'* » désigne ici la longueur EE' du segment [EE'] de la tangente (EE').

4 Cette phrase peut se résumer par l'égalité : DI . EE' = AB . RR'; mais Pascal utilise un vocabulaire très géométrique.

5 « Proposition » a ici, comme encore souvent de nos jours en mathématiques, le sens de « théorème ».

6 « *la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes* » désigne la distance AO.

Préparation à la démonstration

Soit un arc quelconque BP divisé en un nombre indéfini de parties aux points D, d'où soient menés les sinus PO, DI, etc. (...)

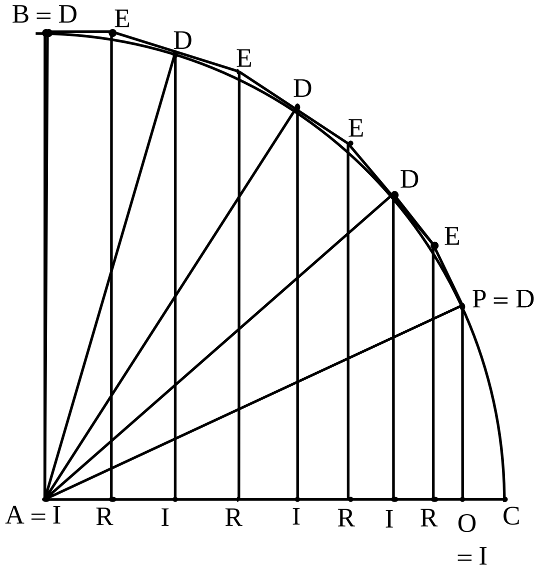
Démonstration de la proposition I

Je dis que la somme des sinus DI (multipliés chacun par un des arcs égaux DD, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite AO multipliée par le rayon AB.

Car en menant de tous les points D les touchantes DE, dont chacune coupe sa voisine au point E, et ramenant les perpendiculaires ER, il est visible que chaque sinus DI, multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR, multipliée par le rayon AB

Donc tous les rectangles ensemble des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble faits de toutes les portions RR multipliées par AB ; c'est-à-dire (puisqu'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus, et que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus DI, multipliés chacun par une des touchantes EE, est égale à la somme des distances RR, soit à AO multipliée par AB.

Mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD. Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux est égale à la distance AO, multipliée par le rayon.



Avertissement

Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble RR sont égales à AO, et de même que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude des sinus est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles EE ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée: non plus que la somme des RR de l'entière AO. (...)

B. Transcription moderne de la démarche de Pascal à propos de la Proposition I.

Dans sa « *préparation de démonstration* », Pascal « *divise l'arc BP en un nombre indéfini de parties aux points D* ». On dirait aujourd'hui que l'arc $\overset{\frown}{BP}$ est divisé en n arcs de même longueur : $\overset{\frown}{D_0D_1}, \overset{\frown}{D_1D_2}, \overset{\frown}{D_2D_3}, \ldots, \overset{\frown}{D_{n-1}D_n}$ avec $D_0 = P$ et $D_n = B$.

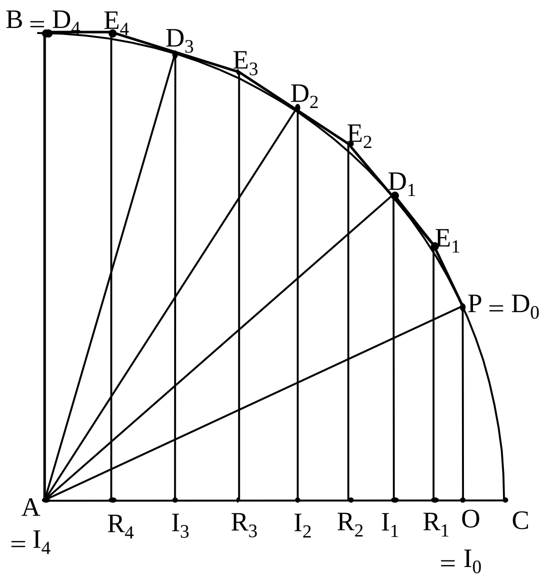
Chaque point D_k a pour projeté orthogonal sur la droite (AC) le point I_k.

Le point d'intersection de deux tangentes successives au cercles, menées par D_{k-1} et D_k, est noté E_k ($1 \le k \le n$) et on pose $E_{n+1} = B$.

Le projeté orthogonal de E_k sur (AC) est noté R_k ($1 \le k \le n$) et on pose $R_{n+1} = A$.

Pascal démontre d'abord que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et $n - 1$:

$D_kI_k \,.\, E_kE_{k+1} = AB \,.\, R_kR_{k+1}$. (1)



Puis Pascal introduit le nombre égal à « *tous les rectangles ensemble des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE* ».

Pour suivre son idée, on note s la somme $s = D_1I_1.E_1E_2 + D_2I_2\,.E_2E_3 + \ldots + D_nI_n\,.E_nE_{n+1}$.

On montre que $s = R_1A \,.\, AB$. (2) .

Lorsque le nombre de subdivisions n de l'arc $\overset{\frown}{PB}$ tend vers $+\infty$, s tend vers $AO \,.\, AB$. (3)

Mais Pascal s'intéresse en fait à la limite quand n tend vers $+\infty$ de la somme s' suivante :

$s' = D_1I_1 \cdot \text{long}\,\overset{\frown}{D_0D_1} + D_2I_2 \cdot \text{long}\,\overset{\frown}{D_1D_2} + \ldots + D_nI_n \cdot \text{long}\,\overset{\frown}{D_{n-1}D_n}$ où $\text{long}\,\overset{\frown}{D_i\,D_{i+1}}$ désigne la longueur de l'arc $\overset{\frown}{D_i\,D_{i+1}}$.

Pascal admet que cette dernière limite est égale à celle de s, lorsque n tend vers $+\infty$. (4)

Conclusion : La limite de la somme s' lorsque n tend vers $+\infty$ vaut : $AO \,.\, AB$.

C. Questions sur la démarche de Pascal

1. Énoncer le lemme en langage moderne et le démontrer.

2. a. Démontrer l'affirmation (1) pour $1 \le k \le n - 1$ et aussi pour $k = n$.
   b. Démontrer alors l'affirmation (2).

3. Expliquer par des considérations géométriques pourquoi les affirmations (3) et (4) semblent valables.

4. On a ici exprimé les affirmations (3) et (4) grâce au vocabulaire actuel des limites, dont ne disposait pas Pascal. Relever dans l'*Avertissement* les expressions grâce auxquelles Pascal évoque l'idée du passage à la limite.

D. Transcription moderne de l'énoncé de la proposition I : « Un calcul d'intégrale par la méthode des rectangles »

1. Pascal a donc calculé dans ce texte la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme

$$s' = D_1I_1 \cdot \text{long}\,\overset{\frown}{D_0D_1} + D_2I_2 \cdot \text{long}\,\overset{\frown}{D_1D_2} + \ldots + D_nI_n \cdot \text{long}\,\overset{\frown}{D_{n-1}D_n}$$

Dans l'énoncé du théorème, il dénomme cette limite « *Somme des sinus* » de l'arc $\overset{\frown}{BP}$.

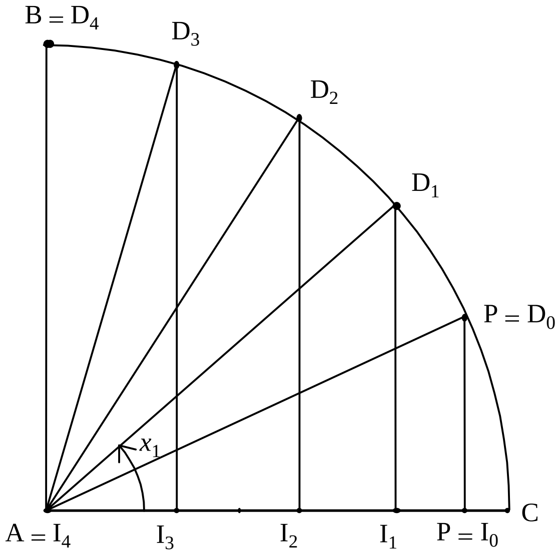
Nous allons montrer qu'il s'agit en fait d'une intégrale.

Pour simplifier, on se place désormais dans le cas particulier où le rayon AB du cercle vaut l'unité.

On note $p = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n = \frac{\pi}{2}$ les longueurs respectives des arcs $\overset{\frown}{CP}, \overset{\frown}{CD_1}, \overset{\frown}{CD_2}, \ldots, \overset{\frown}{CD_n}$.

Démontrer que :

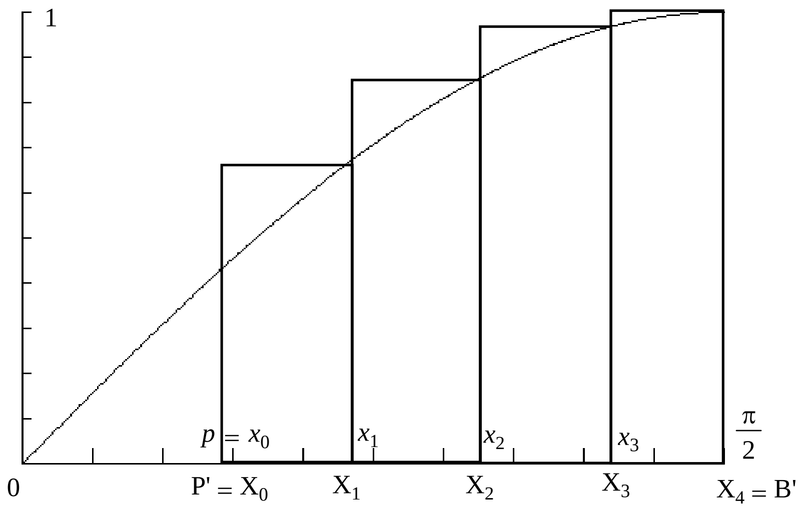
$$s' = \text{long}\,\overset{\frown}{D_0D_1} \cdot \sin(x_1) + \text{long}\,\overset{\frown}{D_1D_2} \cdot \sin(x_2) + \ldots + \text{long}\,\overset{\frown}{D_{n-1}D_n} \cdot \sin(x_n)$$



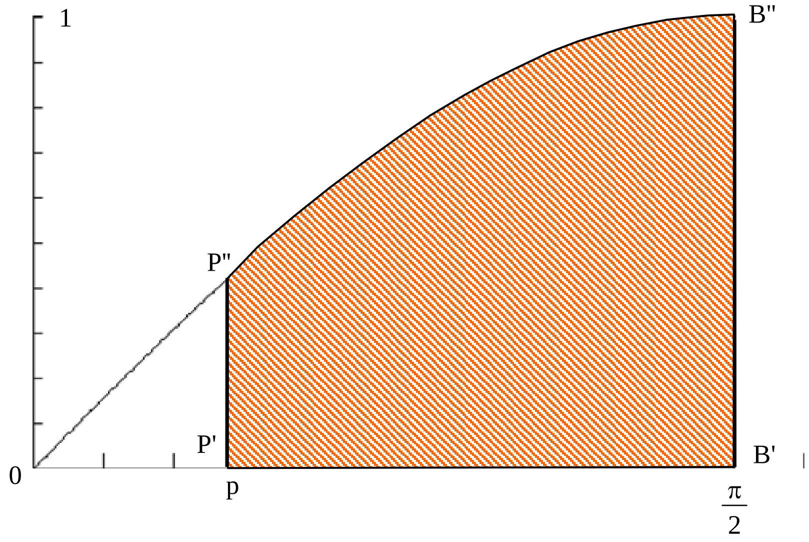
2. On considère maintenant la courbe représentative de la fonction sinus dans un repère orthonormal, puis les points $P' = X_0$, X_1, X_2, ... , X_n de l'axe des abscisses, d'abscisses respectives $p = x_0$, x_1, x_2, ... $x_n = \frac{\pi}{2}$ (voir la figure ci-dessous).

   a. Vérifier que s' apparaît alors comme la somme des aires des rectangles dessinés sur la figure dans le cas où $n = 4$.

   b. Expliquer pourquoi, lorsque n, nombre de points de la subdivision, tend vers $+\infty$, la somme s' des aires des rectangles semble tendre vers l'aire a de la portion de plan P'P"B"B' comprise entre (Ox) et la sinusoïde d'une part, et entre les droites d'équations $x = p$ et $x = \frac{\pi}{2}$, d'autre part.



La « *somme des sinus* » dont parle Pascal, qui est la limite de s', peut donc être interprétée graphiquement comme étant égale à l'aire a, c'est-à-dire encore comme l'intégrale $\int_p^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ .D'ailleurs le signe $\int$ d'intégration, qui se lit « intégrale » ou « somme », dû à Leibniz, est une déformation de « S » initiale du mot « somme ».



c. Dans le cas où $AB = 1$, vérifier que le résultat de Pascal se traduit par :

$$\int_p^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \cos(p)$$

Vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul intégral.